第三节 格林公式及其应用

一、格林公式

二、平面上曲线积分与路径无关的等价条件

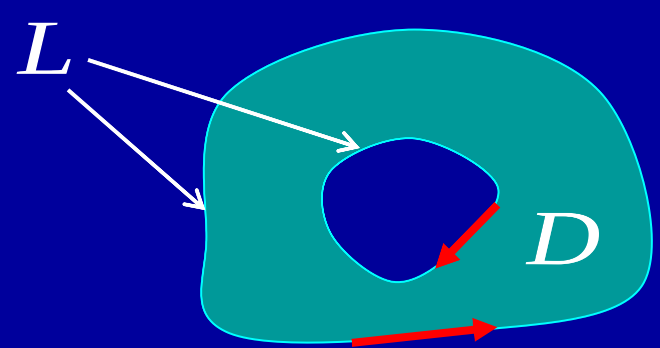
*三、全微分方程

一、 格林公式

区域 D 分类

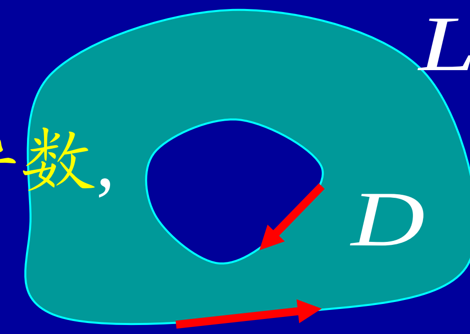
- 单连通区域 (无“洞”区域)
- 复连通区域 (有“洞”区域)

域 D 边界 L 的**正向**: **域的内部靠左**



一、 格林公式

定理1. 设区域 D 是由分段光滑正向曲线 L 围成,



函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 D 上具有连续一阶偏导数,

则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$ （格林公式）

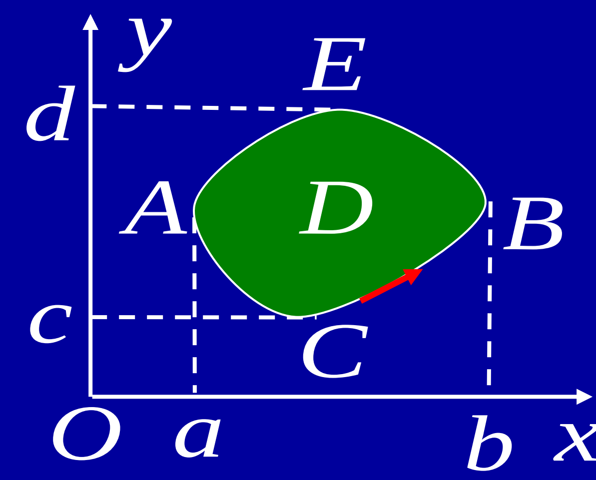
或

$$\iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

证明: 1) 若D既是X-型区域，又是Y-型区域，且

$$D:\begin{cases} a\le x\le b \\ \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\end{cases}$$

$$D:\begin{cases} \psi_1(y)\le x\le \psi_2(y) \\ c\le y\le d\end{cases}$$



则 $$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}\frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_c^d Q(\psi_2(y),y)\,\mathrm{d}y-\int_c^d Q(\psi_1(y),y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\widehat{CBE}} Q(x,y)\mathrm{d}y-\int_{\widehat{CAE}} Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\widehat{CBE}} Q(x,y)\mathrm{d}y+\int_{\widehat{EAC}} Q(x,y)\mathrm{d}y$$

即 $$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L Q(x,y)\,\mathrm{d}y \qquad ①$$

同理可证

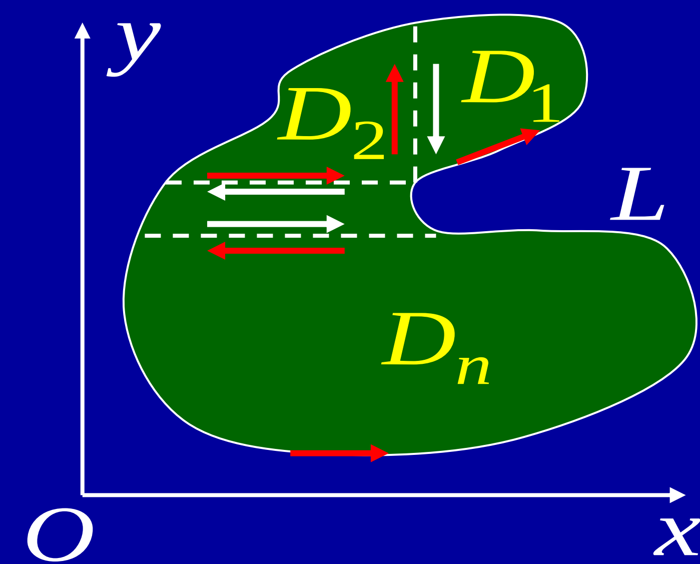
$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P(x,y)\,\mathrm{d}x \qquad ②$$

①、②两式相加得:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

2) 若D不满足以上条件，则可通过加辅助线将其分割

为有限个上述形式的区域，如图



$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\iint_{D_k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\oint_{\partial D_k} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y \qquad (\partial D_k\text{表示}D_k\text{的正向边界})$$

$$=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

证毕

格林公式

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

推论: 正向闭曲线 L 所围区域 D 的面积

$$A = \frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

例如, 椭圆 $L: \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ 所围面积

$$A = \frac{1}{2}\oint_L x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (ab\cos^2\theta + ab\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta = \pi ab$$

例1. 设 L 是一条分段光滑的闭曲线, 证明

$$\oint_L 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = 0$$

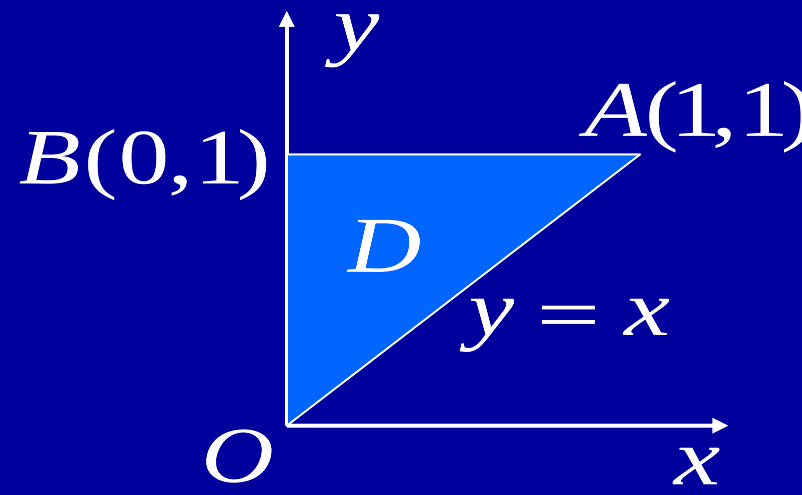
证: 令 $P = 2xy,\ Q = x^2$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2x = 0$$

利用格林公式, 得

$$\oint_L 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = \iint_D 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

例2. 计算 $\iint_D \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是以 $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(0,1)$ 为顶点的三角形闭域.



解: 令 $P=0,\ Q=x\mathrm{e}^{-y^2}$ ，则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\mathrm{e}^{-y^2}$$

利用格林公式，有

$$\iint_D \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial D} x\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\overline{OA}} x\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y=\int_0^1 y\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-1})$$

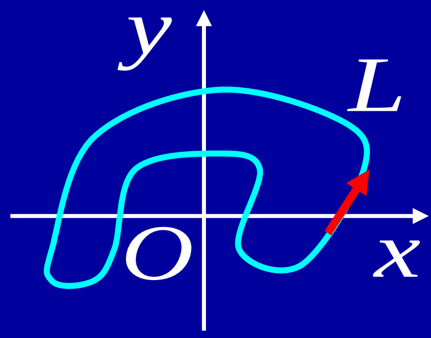
例3. 计算 $\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 其中$L$为一无重点且不过原点的分段光滑正向闭曲线.

解: 令 $P = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $Q = \frac{x}{x^2+y^2}$

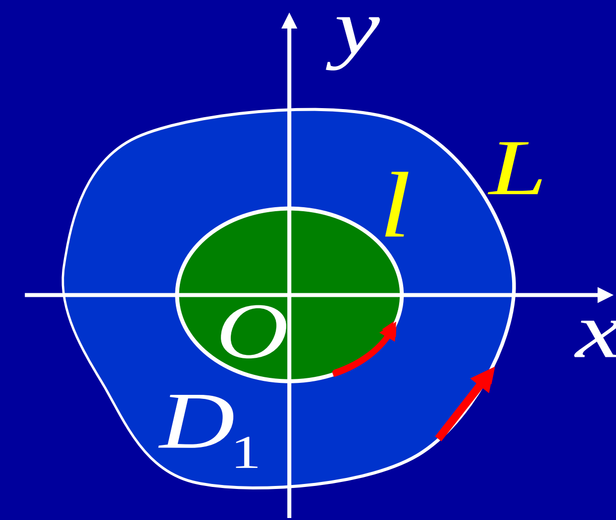
则当$x^2+y^2 \neq 0$时, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$

设 L 所围区域为D, 当$(0,0) \notin D$时,由格林公式知

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = 0$$



当$(0,0)\in D$时，在D内作圆周$l: x^2+y^2=r^2$，取逆时针方向，记L和l^-所围的区域为D_1，对区域D_1应用格林公式，得



$$\oint_L \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} - \oint_l \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$= \oint_{L\cup l^-} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \iint_{D_1} 0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

$$\therefore \quad \oint_L \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \oint_l \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}{r^2}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi$$

二、平面上曲线积分与路径无关的等价条件

定理2. 设D是单连通域，函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在D内具有一阶连续偏导数, 则以下四个条件等价:

(1) 沿D中任意光滑闭曲线 L, 有 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0.$

(2) 对D中任一分段光滑曲线 L, 曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关, 只与起止点有关.

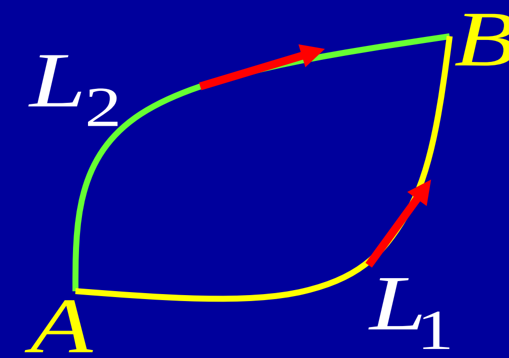
(3) $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 在 D 内是某一函数 $u(x,y)$的全微分,

即 $\mathrm{d}\,u(x,y)=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$

(4) 在 D 内每一点都有 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}.$

证明 (1) $\Rightarrow$ (2)

设 L_1, L_2 为 D 内任意两条由 A 到 B 的有向分段光滑曲线,



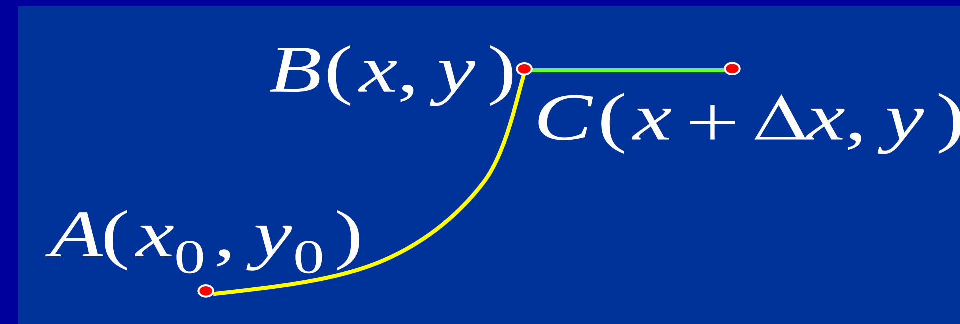
则
$$\int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y - \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$
$$= \int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \int_{L_2^-} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$
$$= \int_{L_1 \cup L_2^-} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0 \quad \text{(根据条件(1))}$$
$$\therefore \quad \int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

说明: 积分与路径无关时, 曲线积分可记为
$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_A^B P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

证明 $(2) \Rightarrow (3)$

在D内取定点 $A(x_0, y_0)$ 和任一点$B(x, y)$，因曲线积分与路径无关，有函数

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$



则 $\Delta_x u = u(x+\Delta x, y) - u(x, y)$

$$= \int_{(x, y)}^{(x+\Delta x, y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{(x, y)}^{(x+\Delta x, y)} P\mathrm{d}x$$

$$= P(x+\theta\Delta x, y)\Delta x$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} P(x+\theta\Delta x, y) = P(x, y)$$

同理可证 $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$，因此有 $\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$

证明 $(3) \Rightarrow (4)$

设存在函数 $u(x, y)$ 使得

$$\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

则 $$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

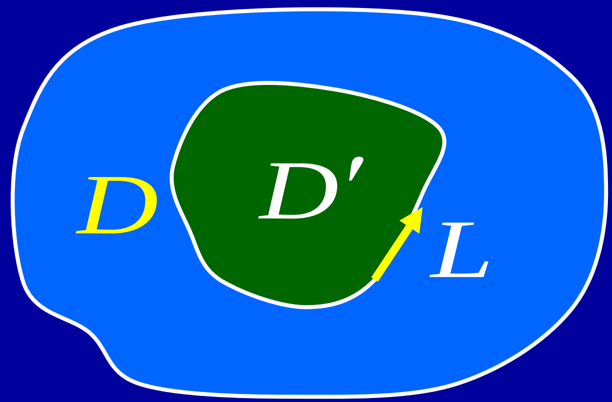
P, Q 在 D 内具有连续的偏导数，所以 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$

从而在D内每一点都有 $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

证明 (4) $\Rightarrow$ (1)

设L为D中任一分段光滑闭曲线，所围区域为 $D' \subset D$ (如图)，因此在 D'上

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$$



利用**格林公式**，得

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$ 证毕

---

(4) 在 D 内每一点都有 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

(1) 沿D 中任意光滑闭曲线 L，有 $\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$.

定理2. 设D是单连通域，函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在D内具有一阶连续偏导数, 则以下四个条件等价:

(1) 沿D中任意光滑闭曲线L, 有 $\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0.$

(2) 对D中任一分段光滑曲线L, 曲线积分 $\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 与路径无关, 只与起止点有关.

(3) $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$在$D$内是某一函数$u(x,y)$的全微分,

即 $\mathrm{d}u(x,y) = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$

(4) 在D内每一点都有 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}.$

说明: 根据定理2, 若在某区域D内 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, 则

1) 计算曲线积分时, 可选择方便的积分路径;

2) 求曲线积分时, 可利用格林公式简化计算,

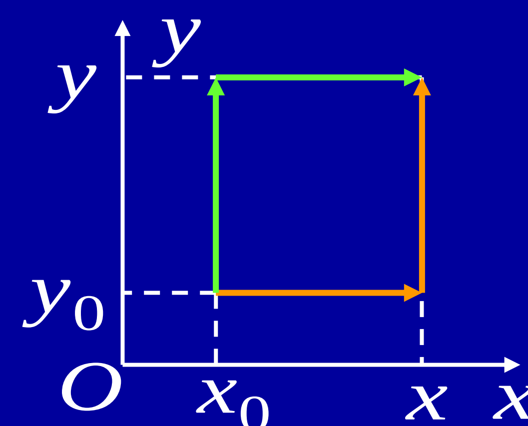
若积分路径不是闭曲线, 可添加辅助线;

3) 可用积分法求$\mathrm{d}\,u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$在域 D 内的原函数:

取定点 $(x_0, y_0)\in D$ 及动点$(x, y)\in D$, 则原函数为

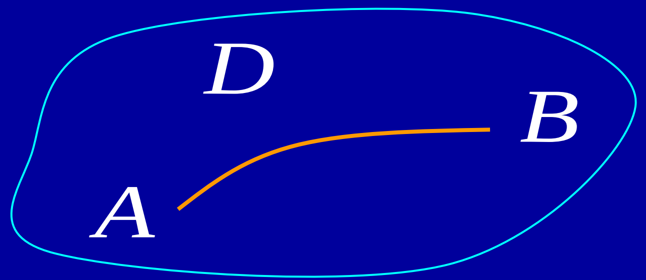
$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)\mathrm{d}y$$



或 $u(x,y)=\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\mathrm{d}y+\int_{x_0}^{x} P(x,y)\mathrm{d}x$

4) 若已知 $\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$，则对$D$内任一分段光滑曲线$\overset{\frown}{AB}$,有



$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_A^B P(x,y)\,\mathrm{d}\,x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_A^B \mathrm{d}\,u = u\Big|_A^B = u(B) - u(A)$$

注: 此式称为**曲线积分的基本公式**(P216定理4).

它类似于微积分基本公式:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b \mathrm{d}\,F(x) \quad (\text{其中 } F'(x) = f(x))$$

$$= F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

例4. 计算 $\int_L (x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$, 其中$L$ 为上半圆周 $y=\sqrt{4x-x^2}$ 从 $O\,(0,0)$ 到 $A\,(4,0)$.

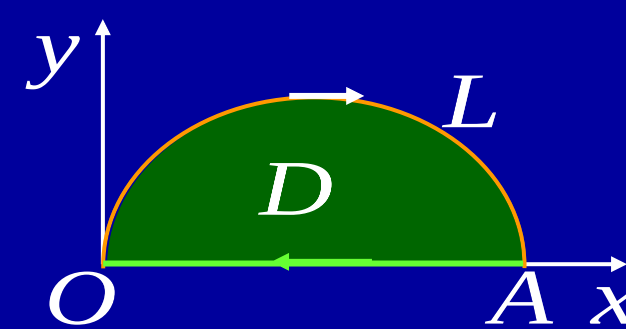
解: 为了使用格林公式, 添加辅助线段 $\overline{AO}$, 它与L 所围区域为D,

则 原式 $=\oint_{L\cup\overline{AO}}(x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$

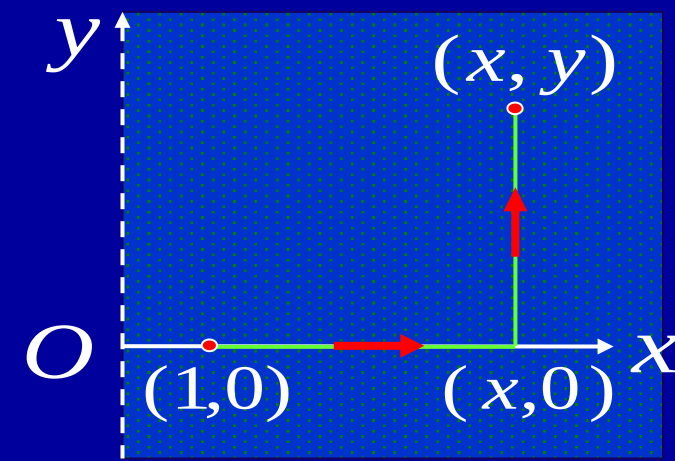
$$+\int_{\overline{OA}}(x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

$$=4\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^4 x^2\,\mathrm{d}x$$

$$=8\pi+\frac{64}{3}$$



例5. 验证 $\dfrac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ 在右半平面 $(x>0)$ 内存在原函数，并求出它.



证: 令 $P=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$，$Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}$

则 $$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial y}\qquad (x>0)$$

由**定理 2** 可知存在原函数

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$=0+x\int_0^y\frac{\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}\qquad (x>0)$$

例6. 验证 $xy^2\,\mathrm{d}x + x^2y\,\mathrm{d}y$ 是某个函数的全微分, 并求出这个函数.

证: 设 $P = xy^2,\ Q = x^2y$, 则 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2xy = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

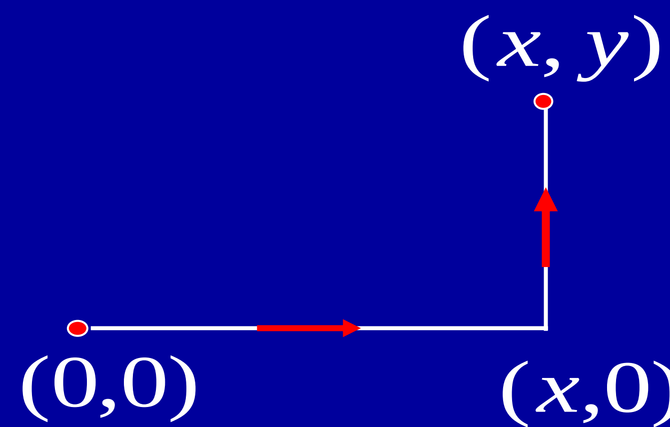
由定理2 可知, 存在函数 $u(x, y)$ 使

$$\mathrm{d}u = xy^2\,\mathrm{d}x + x^2y\,\mathrm{d}y$$

$$u(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} xy^2\,\mathrm{d}x + x^2y\,\mathrm{d}y$$

$$= 0 + \int_0^y x^2y\ \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^y x^2y\ \mathrm{d}y = \frac{1}{2}x^2y^2$$



*三、全微分方程

若存在 $u(x,y)$ 使 $\mathrm{d}u(x,y) = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$

则称 $$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \qquad ③$$

为全微分方程.

判别: P, Q 在某单连通域 D 内有连续一阶偏导数, 则

③为全微分方程 $\Longleftrightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \ (x,y) \in D$

求解步骤:

1. 求原函数 $u(x,y)$

   方法1 凑微分法;

   方法2 利用积分与路径无关的条件.

2. 由 $\mathrm{d}u = 0$ 知通解为 $u(x,y) = C$.

例7. 求解

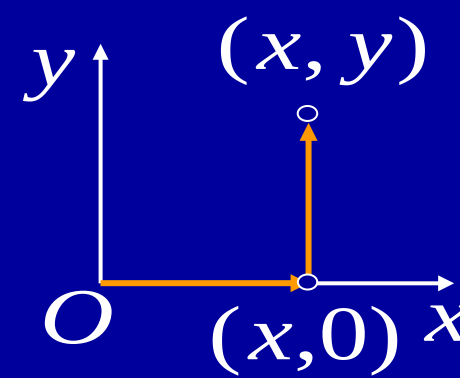
$$(5x^4+3xy^2-y^3)\,\mathrm{d}x+(3x^2y-3xy^2+y^2)\,\mathrm{d}y=0$$

解: 因为 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=6xy-3y^2=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, 故这是全微分方程.

取 $x_0=0,\ y_0=0,$ 则有

$$u(x,y)=\int_0^x 5x^4\,\mathrm{d}x+\int_0^y(3x^2y-3xy^2+y^2)\,\mathrm{d}y$$

$$=x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3$$



因此方程的通解为

$$x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3=C$$

方法2 此全微分方程的通解为 $u(x,y)=C$ ，则有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=5x^4+3xy^2-y^3 \qquad ④$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2y-3xy^2+y^2 \qquad ⑤$$

由④得 $u(x,y)=\int(5x^4+3xy^2-y^3)\,\mathrm{d}x+\varphi(y)$

$$=x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\varphi(y),\quad \varphi(y)\text{待定}$$

两边对 y 求导得 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=3x^2y-3xy^2+\varphi'(y)$

与⑤比较得 $\varphi'(y)=y^2$， 取 $\varphi(y)=\dfrac{1}{3}y^3$

因此方程的通解为 $x^5+\dfrac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\dfrac{1}{3}y^3=C$

例8. 求解 $(x+\frac{y}{x^2})\,\mathrm{d}x-\frac{1}{x}\,\mathrm{d}y=0$

解: $\because\ \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{x^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\therefore$ 这是一个全微分方程 .

用凑微分法求通解. 将方程改写为

$$x\,\mathrm{d}x-\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2}=0$$

即 $\mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2)-\mathrm{d}(\frac{y}{x})=0$, 或 $\mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2-\frac{y}{x})=0$

故原方程的通解为 $\frac{1}{2}x^2-\frac{y}{x}=C$

11.3 作　　业

P217

2 (1) ;　　3 ;

6 (1) , (3) ;　　7 (2) , (4) ;

8 (5);　　10 (1);

内容小结

1. 格林公式 $\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

2. 等价条件

设 P, Q 在 D 内具有一阶连续偏导数, 则有

$\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 在 D 内与路径无关.

$\Longleftrightarrow$ 对 D 内任意闭曲线 L 有 $\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0$

$\Longleftrightarrow$ 在 D 内有 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

$\Longleftrightarrow$ 在 D 内有 $\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$

$\Longleftrightarrow$ $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0$ 为全微分方程