第四节
对面积的曲面积分

一、对面积的曲面积分的概念与性质

二、对面积的曲面积分的计算法

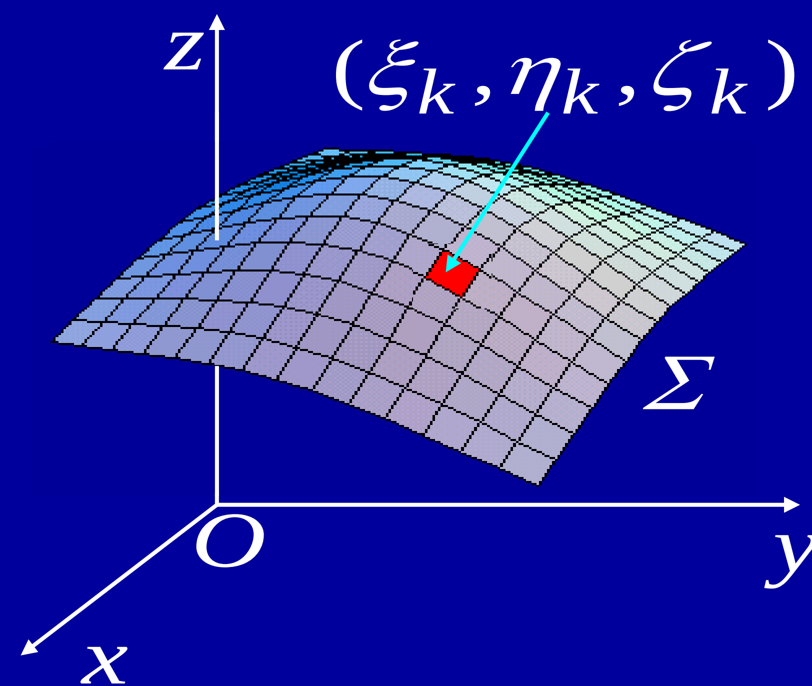
一、对面积的曲面积分的概念与性质

引例: 设曲面形构件具有连续面密度 $\rho(x, y, z)$, 求质量 M.

类似求平面薄板质量的思想, 采用

"大化小, 常代变, 近似和, 求极限"

的方法, 可得



$$M = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta S_k$$

其中, λ 表示 n 小块曲面的直径的最大值 (曲面的直径为其上任意两点间距离的最大者).

定义: 设 Σ 为光滑曲面, $f(x,y,z)$ 是定义在 Σ 上的一个有界函数, 若对 Σ 做任意分割和局部区域任意取点, "乘积和式极限"

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k \xlongequal{\text{记作}} \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

都存在, 则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在曲面 Σ 上对面积的曲面积分 或第一类曲面积分. 其中 $f(x,y,z)$ 叫做被积函数, Σ 叫做积分曲面.

据此定义, 曲面形构件的质量为 $M=\iint_{\Sigma}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S$

曲面面积为 $S=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S$

对面积的曲面积分与对弧长的曲线积分性质类似.

- 积分的存在性. 若 $f(x,y,z)$ 在光滑曲面 Σ 上连续, 则对面积的曲面积分存在.
- 对积分域的可加性. 若 Σ 是分片光滑的, 例如分成两片光滑曲面 Σ_1, Σ_2, 则有

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

- 线性性质. 设 k_1, k_2 为常数, 则

$$\iint_{\Sigma} [k_1 f(x,y,z) \pm k_2 g(x,y,z)]\,\mathrm{d}S = k_1 \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S \pm k_2 \iint_{\Sigma} g(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

二、对面积的曲面积分的计算法

定理: 设有光滑曲面

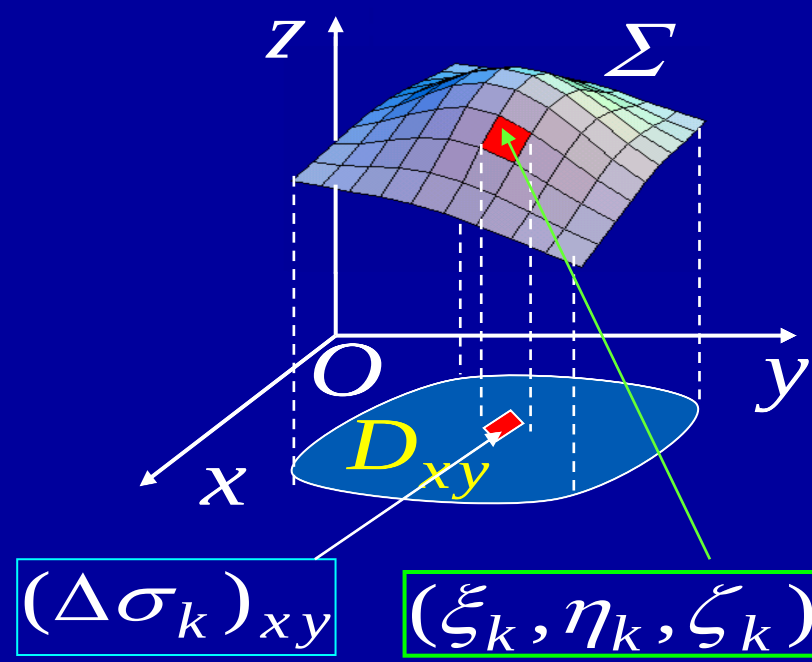
$$\Sigma : z = z(x, y),\ (x, y) \in D_{xy}$$

$f(x, y, z)$ 在 Σ 上连续，则曲面积分

$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S$ 存在，且有

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x^{\,2}(x, y) + z_y^{\,2}(x, y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



证明: 由定义知

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta S_k$$

而 $\Delta S_k = \iint_{(\Delta\sigma_k)_{xy}} \sqrt{1+z_x^{\,2}(x,y)+z_y^{\,2}(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \sqrt{1+z_x^{\,2}(\xi_k',\eta_k')+z_y^{\,2}(\xi_k',\eta_k')}\,(\Delta\sigma_k)_{xy}$$

$$\therefore \iint_\Sigma f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,z(\xi_k,\eta_k))\cdot \sqrt{1+z_x^{\,2}(\xi_k',\eta_k')+z_y^{\,2}(\xi_k',\eta_k')}\,(\Delta\sigma_k)_{xy}$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,z(\xi_k,\eta_k))\cdot \sqrt{1+z_x^{\,2}(\xi_k,\eta_k)+z_y^{\,2}(\xi_k,\eta_k)}\,(\Delta\sigma_k)_{xy}$$

(Σ光滑)

$$= \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^{\,2}(x,y)+z_y^{\,2}(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

说明:

1) 如果曲面方程为

$$x = x(y,z),\ (y,z) \in D_{yz}$$

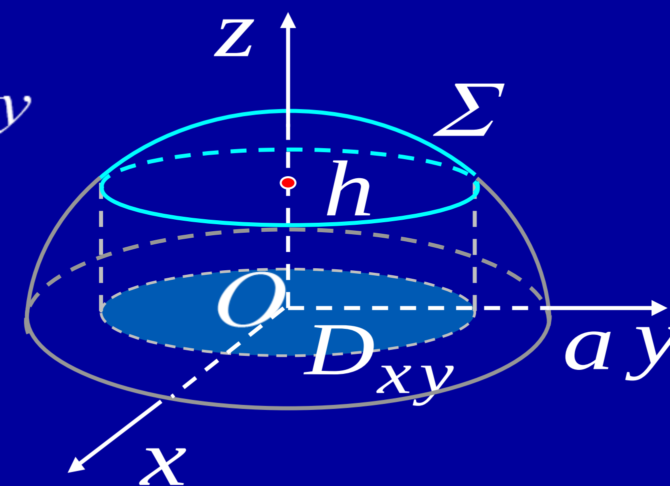
或 $$y = y(x,z),\ (x,z) \in D_{xz}$$

可有类似的公式.

2) 若曲面为参数方程, 只要求出在参数意义下 $\mathrm{d}S$ 的表达式, 也可将对面积的曲面积分转化为对参数的二重积分. (见例3)

例1. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}$,其中$\Sigma$是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$被平面 $z=h\,(0<h<a)$截出的顶部.

解: $\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,,(x,y)\in D_{xy}$



$$D_{xy}: x^2+y^2\le a^2-h^2$$

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$\therefore \iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}=\iint_{D_{xy}}\frac{a\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{a^2-x^2-y^2}=a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{r\,\mathrm{d}r}{a^2-r^2}$$

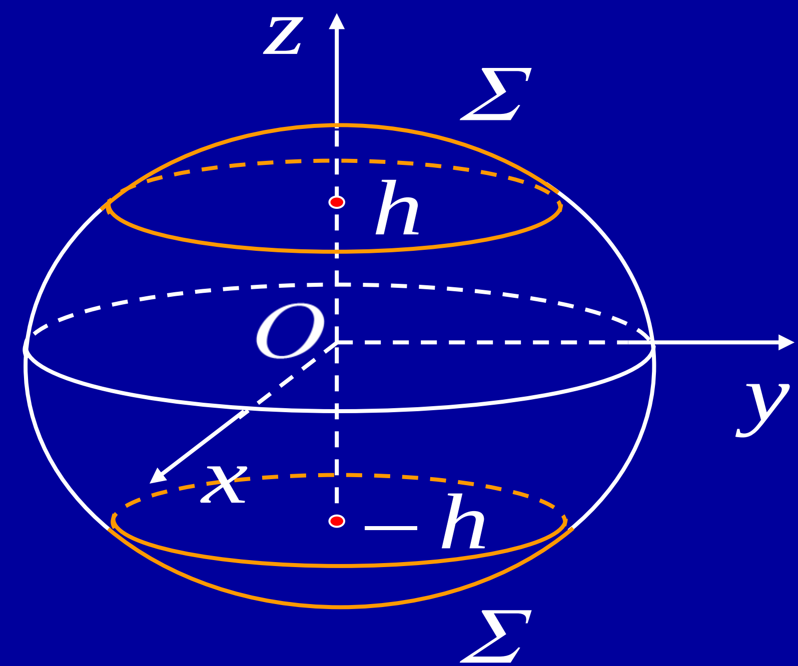
$$=2\pi a\left[-\frac{1}{2}\ln(a^2-r^2)\right]_0^{\sqrt{a^2+h^2}}=2\pi a\ln\frac{a}{h}$$

思考:

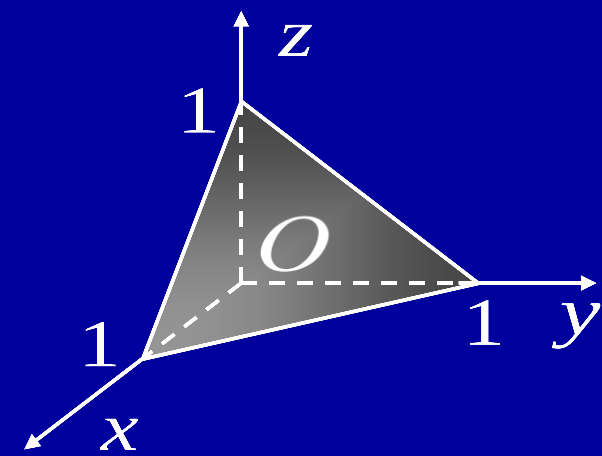
若 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平行平面 $z=\pm h$ 截出的上下两部分，则

$$\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}=(\quad 0 \quad)$$

$$\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{|z|}=(\quad 4\pi a\ln\frac{a}{h} \quad)$$



例2. 计算 $\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是由平面 $x+y+z=1$ 与坐标面所围成的四面体的表面.



解: 设 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ 分别表示 Σ 在平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 上的部分, 则

$$\text{原式} = \left(\iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2} + \iint_{\Sigma_3} + \iint_{\Sigma_4}\right) xyz\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{\Sigma_4} xyz\,\mathrm{d}S$$

$$\Sigma_4: z = 1-x-y,\quad (x,y)\in D_{xy}: \begin{cases} 0 \le y \le 1-x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x \int_0^{1-x} y(1-x-y)\,\mathrm{d}y = \sqrt{3}/120$$

例3. 求椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 位于 xOy 面上方及平面 $z=y$ 下方那部分柱面 Σ 的侧面积 S.

解: $S=\iint_\Sigma \mathrm{d}S$

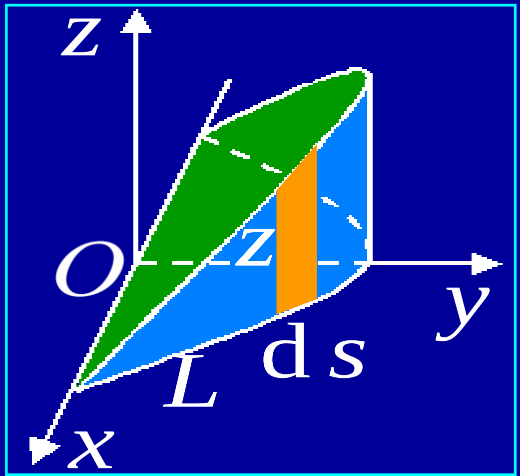
$L: x=\sqrt{5}\cos t\,,\ y=3\sin t\ \ (0\le t\le\pi)$

取 $\mathrm{d}S=z\,\mathrm{d}s$

$$=\int_L z\,\mathrm{d}s=\int_L y\,\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^\pi 3\sin t\sqrt{5\sin^2 t+9\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$=-3\int_0^\pi\sqrt{5+4\cos^2 t}\,\mathrm{d}\cos t=9+\frac{15}{4}\ln 5$$



作业

P222

4(2);　　5(2);

6(2), (4);

内容小结

1. 定义: $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$

2. 计算: 设 $\Sigma : z = z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(曲面的其他两种情况类似)

- 注意利用球面坐标、柱面坐标、对称性、质心公式简化计算的技巧.

备用题 1. 已知曲面壳 $z=3-(x^2+y^2)$ 的面密度 $\mu=x^2+y^2+z$, 求此曲面壳在平面 z =1以上部分Σ的质量 M.

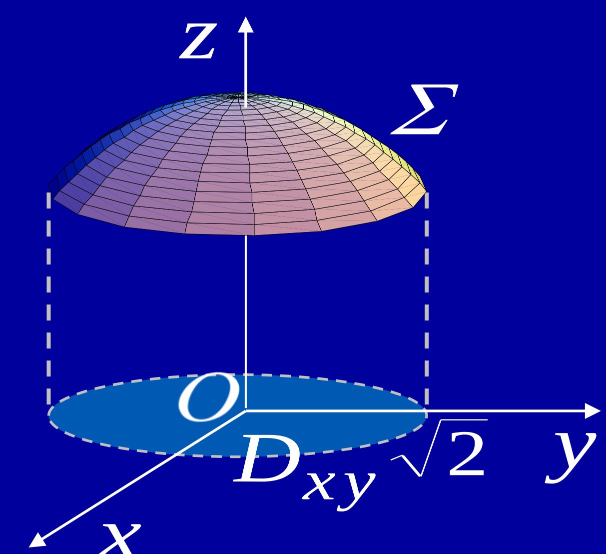
解: Σ 在 xOy 面上的投影为 $D_{xy}: x^2+y^2\le 2$, 故

$$M=\iint_{\Sigma}\mu\,\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}3\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

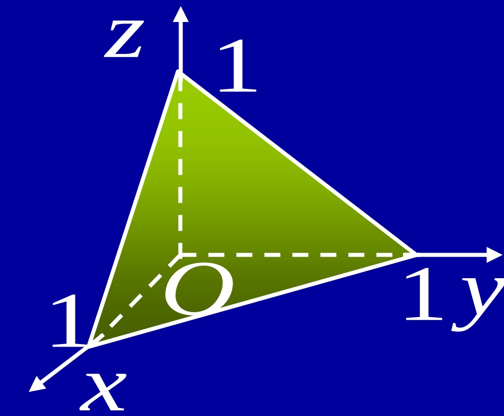
$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$=6\pi\cdot\frac{1}{8}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}(1+4r^2)$$

$$=13\pi$$



2. 设 Σ 是四面体 $x+y+z\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$ 的表面，计算 $I=\displaystyle\oiint_{\Sigma}\frac{1}{(1+x+y)^2}\,\mathrm{d}S.$



解: 在四面体的四个面上

平面方程	$\mathrm{d}S$	投影域
$z=1-x-y$	$\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	$D_{xy}:0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x$
$z=0$	$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	同上
$y=0$	$\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$	$D_{zx}:0\le z\le 1,\ 0\le x\le 1-z$
$x=0$	$\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$	$D_{yz}:0\le z\le 1,\ 0\le y\le 1-z$

$$\therefore\ I=\oiint_{\Sigma}\frac{1}{(1+x+y)^2}\,\mathrm{d}S$$

$$=(\sqrt{3}+1)\int_0^1\mathrm{d}\,x\int_0^{1-x}\frac{1}{(1+x+y)^2}\,\mathrm{d}\,y+$$

$$+\int_0^1\mathrm{d}\,z\int_0^{1-z}\frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{d}\,z\int_0^{1-z}\frac{1}{(1+y)^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2$$

平面方程	$\mathrm{d}S$	投影域
$z=1-x-y$	$\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	$D_{xy}:0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x$
$z=0$	$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	同上
$y=0$	$\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$	$D_{zx}:0\le z\le 1,\ 0\le x\le 1-z$
$x=0$	$\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$	$D_{yz}:0\le z\le 1,\ 0\le y\le 1-z$