

## 第五节

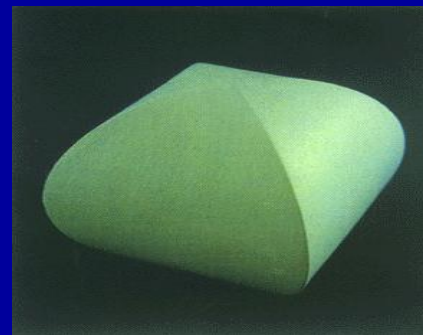
## 对坐标的曲面积分

- 一、有向曲面及曲面元素的投影
- 二、对坐标的曲面积分的概念与性质
- 三、对坐标的曲面积分的算法
- 四、两类曲面积分的联系

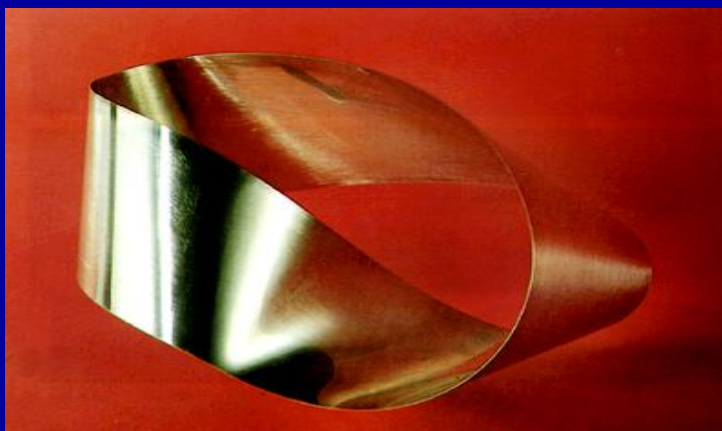


# 一、有向曲面及曲面元素的投影

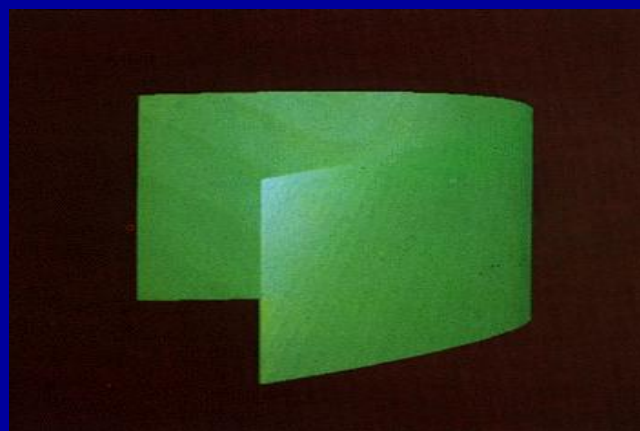
- 曲面分类
  - 双侧曲面
  - 单侧曲面



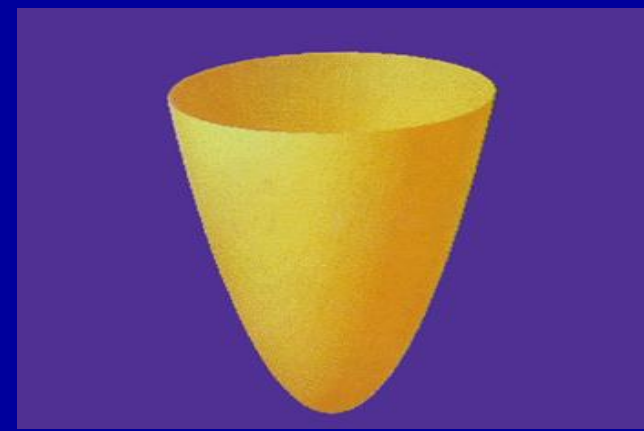
曲面分内侧和外侧



莫比乌斯带  
(单侧曲面的典型)



曲面分左侧和右侧



曲面分上侧和下侧



• 指定了侧的曲面叫有向曲面，  
表示：

其方向用法向量指向

方向余弦	$\cos \alpha$	$\cos \beta$	$\cos \gamma$	封闭曲面
侧的规定	$> 0$ 为前侧	$> 0$ 为右侧	$> 0$ 为上侧	外侧
	$< 0$ 为后侧	$< 0$ 为左侧	$< 0$ 为下侧	内侧

• 设  $\Sigma$  为有向曲面，其面元  $\Delta S$  在  $xOy$  面上的投影记为  $(\Delta S)_{xy}$ ， $(\Delta S)_{xy}$  的面积为  $(\Delta \sigma)_{xy} \geq 0$ ，则规定

$$(\Delta S)_{xy} = \begin{cases} (\Delta \sigma)_{xy}, & \text{当 } \cos \gamma > 0 \text{ 时} \\ -(\Delta \sigma)_{xy}, & \text{当 } \cos \gamma < 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } \cos \gamma \equiv 0 \text{ 时} \end{cases}$$

类似可规定  
 $(\Delta S)_{yz}, (\Delta S)_{zx}$



## 二、对坐标的曲面积分的概念与性质

1. 引例 设稳定流动的不可压缩流体的速度场为

$$\vec{v} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

求单位时间流过有向曲面 $\Sigma$ 的流量 $\Phi$ .

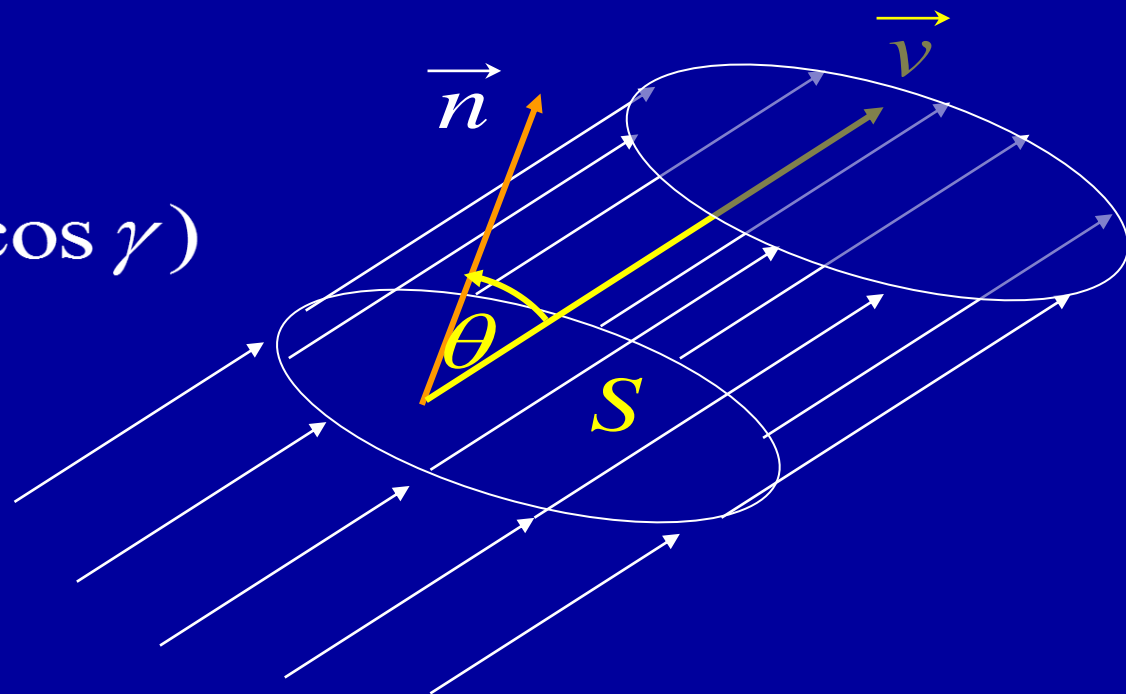
分析: 若 $\Sigma$ 是面积为 $S$ 的平面,

法向量:  $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$

流速为常向量:  $\vec{v}$

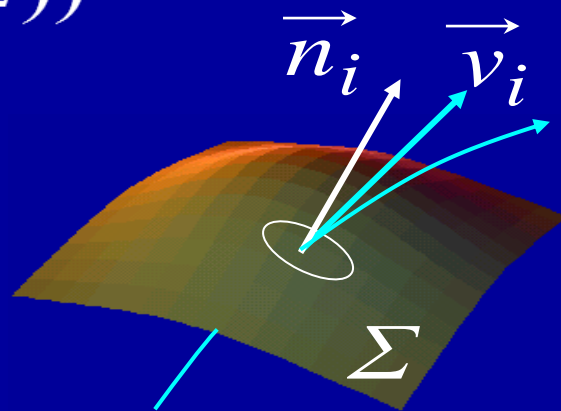
则流量

$$\begin{aligned}\Phi &= S \cdot |\vec{v}| \cos \theta \\ &= S \vec{v} \cdot \vec{n}\end{aligned}$$



对一般的有向曲面 $\Sigma$ , 对稳定流动的不可压缩流体的  
速度场  $\vec{v} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$   
用“大化小, 常代变, 近似和, 取极限”

进行分析可得  $\Phi = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{v}_i \cdot \vec{n}_i \Delta S_i$



设  $\vec{n}_i = (\cos \alpha_i, \cos \beta_i, \cos \gamma_i)$ , 则

$$\begin{aligned} \Phi &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left[ P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \alpha_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \beta_i \right. \\ &\quad \left. + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \gamma_i \right] \Delta S_i \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left[ P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{zx} \right. \\ &\quad \left. + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xy} \right] \end{aligned}$$



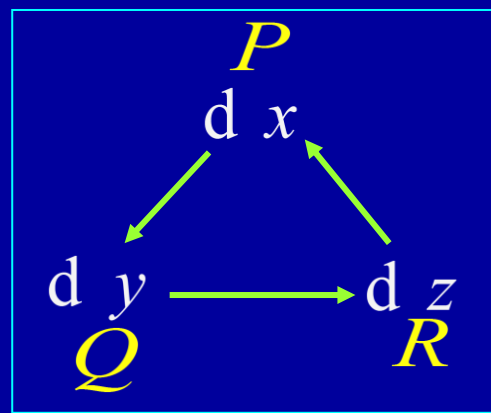
**2. 定义:** 设  $\Sigma$  为光滑的有向曲面, 在  $\Sigma$  上定义了一个向量场  $\vec{A} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ , 若对  $\Sigma$  的任意分割和在局部面元上任意取点, 下列极限都存在

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}]$$

则称此极限为向量场  $A$  在有向曲面上对坐标的曲面积分, 或第二类曲面积分. 记作

$$\iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

$P, Q, R$  叫做被积函数;  $\Sigma$  叫做积分曲面.





$\iint_{\Sigma} P \, dy \, dz$  称为  $P$  在有向曲面  $\Sigma$  上对  $y, z$  的曲面积分;

$\iint_{\Sigma} Q \, dz \, dx$  称为  $Q$  在有向曲面  $\Sigma$  上对  $z, x$  的曲面积分;

$\iint_{\Sigma} R \, dx \, dy$  称为  $R$  在有向曲面  $\Sigma$  上对  $x, y$  的曲面积分.

引例中, 流过有向曲面  $\Sigma$  的流体的流量为

$$\Phi = \iint_{\Sigma} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy$$

若记  $\Sigma$  正侧的单位法向量为  $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$

令  $\overrightarrow{dS} = \vec{n} \, dS = (dy \, dz, dz \, dx, dx \, dy)$

$$\vec{A} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

则对坐标的曲面积分也常写成如下向量形式



$$\iint_{\Sigma} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy \\ = \iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \overrightarrow{dS}$$

### 3. 性质

(1) 若  $\Sigma = \bigcup_{i=1}^k \Sigma_i$ , 且  $\Sigma_i$  之间无公共内点, 则

$$\iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \overrightarrow{dS} = \sum_{i=1}^k \iint_{\Sigma_i} \vec{A} \cdot \overrightarrow{dS}$$

(2) 用  $\Sigma^-$  表示  $\Sigma$  的反向曲面, 则

$$\iint_{\Sigma^-} \vec{A} \cdot \overrightarrow{dS} = -\iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \overrightarrow{dS}$$





### 三、对坐标的曲面积分的算法

**定理:** 设光滑曲面  $\Sigma: z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$  取上侧,  $R(x, y, z)$  是  $\Sigma$  上的连续函数, 则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) \, dx \, dy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) \, dx \, dy$$

**证:** 
$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) \, dx \, dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xy}$$

$$\left| \begin{array}{l} \because \Sigma \text{ 取上侧,} \quad \therefore (\Delta S_i)_{xy} = (\Delta \sigma_i)_{xy} \\ \zeta_i = z(\xi_i, \eta_i) \end{array} \right.$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i)) (\Delta \sigma_i)_{xy}$$

$$= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) \, dx \, dy$$



**说明:** 如果积分曲面  $\Sigma$  取下侧, 则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) \mathrm{d} x \mathrm{d} y = - \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) \mathrm{d} x \mathrm{d} y$$

• 若  $\Sigma: x = x(y, z), (y, z) \in D_{yz}$ , 则有

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) \mathrm{d} y \mathrm{d} z = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) \mathrm{d} y \mathrm{d} z$$

(前正后负)

• 若  $\Sigma: y = y(z, x), (z, x) \in D_{zx}$ , 则有

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) \mathrm{d} z \mathrm{d} x = \pm \iint_{D_{zx}} Q(x, y(z, x), z) \mathrm{d} z \mathrm{d} x$$

(右正左负)



**例1.** 计算  $\iint_{\Sigma} (x+y) \mathrm{d}y \mathrm{d}z + (y+z) \mathrm{d}z \mathrm{d}x + (z+x) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$   
其中  $\Sigma$  是以原点为中心, 边长为  $a$  的正立方体的整个表面的外侧.

**解:** 利用对称性.

$$\text{原式} = 3 \iint_{\Sigma} (z+x) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

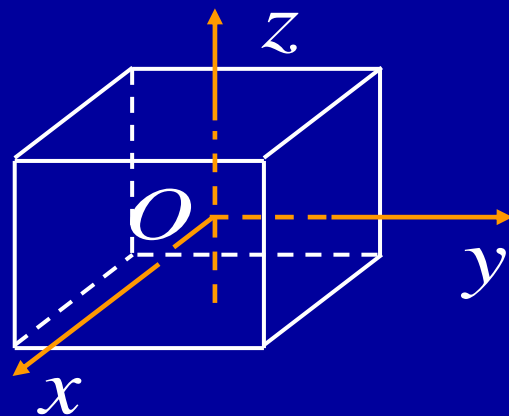
$\Sigma$  的顶部  $\Sigma_1: z = \frac{a}{2} \left( |x| \leq \frac{a}{2}, |y| \leq \frac{a}{2} \right)$  取上侧

$\Sigma$  的底部  $\Sigma_2: z = -\frac{a}{2} \left( |x| \leq \frac{a}{2}, |y| \leq \frac{a}{2} \right)$  取下侧

$$= 3 \left[ \iint_{\Sigma_1} (z+x) \mathrm{d}x \mathrm{d}y + \iint_{\Sigma_2} (z+x) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \right]$$

$$= 3 \left[ \iint_{D_{xy}} \left( \frac{a}{2} + x \right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y - \iint_{D_{xy}} \left( -\frac{a}{2} + x \right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \right]$$

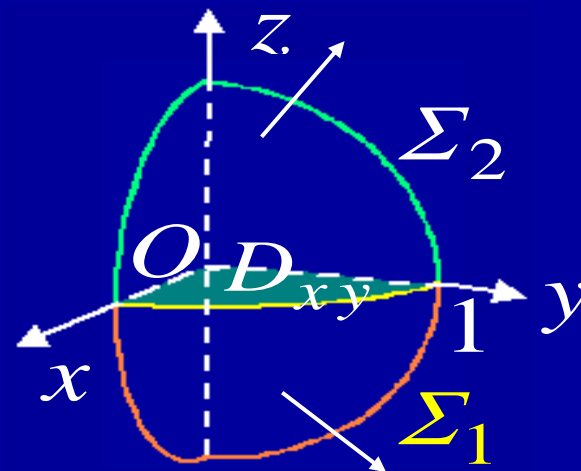
$$= 3a \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x \mathrm{d}y = 3a^3$$



**例2.** 计算曲面积分  $\iint_{\Sigma} xyz \, dx \, dy$ , 其中  $\Sigma$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  外侧在第一和第八卦限部分.

**思考:** 下述解法是否正确:

根据对称性  $\iint_{\Sigma} xyz \, dx \, dy \neq 0$

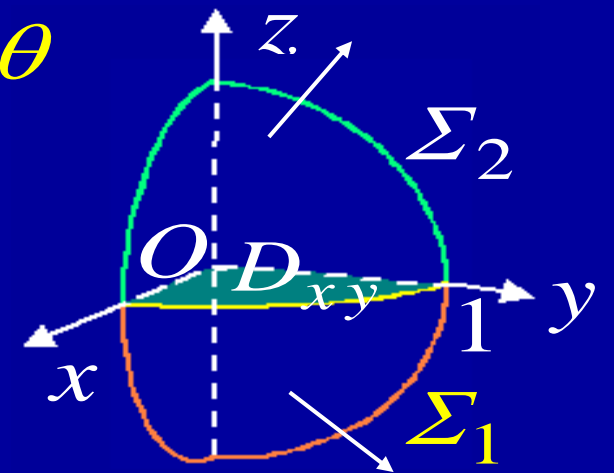


**解:** 把  $\Sigma$  分为上下两部分

$$\begin{cases} \Sigma_1 : z = -\sqrt{1-x^2-y^2} \\ \Sigma_2 : z = \sqrt{1-x^2-y^2} \end{cases}$$
$$(x, y) \in D_{xy} : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
\therefore \iint_{\Sigma} xyz \, dx \, dy &= \iint_{\Sigma_1} xyz \, dx \, dy + \iint_{\Sigma_2} xyz \, dx \, dy \\
&= -\iint_{D_{xy}} xy (-\sqrt{1-x^2-y^2}) \, dx \, dy \\
&\quad + \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy \\
&= 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy \\
&= 2 \iint_{D_{xy}} r^2 \sin \theta \cos \theta \sqrt{1-r^2} \, r \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta \, d\theta \int_0^1 r^3 \sqrt{1-r^2} \, dr \\
&= \frac{2}{15}
\end{aligned}$$



## 四、两类曲面积分的联系

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left[ P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} \right. \\ & \quad \left. + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{xy} \right] \end{aligned}$$

↓ 曲面的方向用法向量的方向余弦刻画

$$\begin{aligned} &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left[ P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \alpha_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \beta_i \right. \\ & \quad \left. + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \gamma_i \right] \Delta S_i \end{aligned}$$

$$= \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$$



$$\iint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy$$

$$= \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{令 } \vec{A} = (P, Q, R), \vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \\ \vec{dS} = \vec{n} dS = (dydz, dzdx, dxdy) \end{array} \right.$$

向量形式

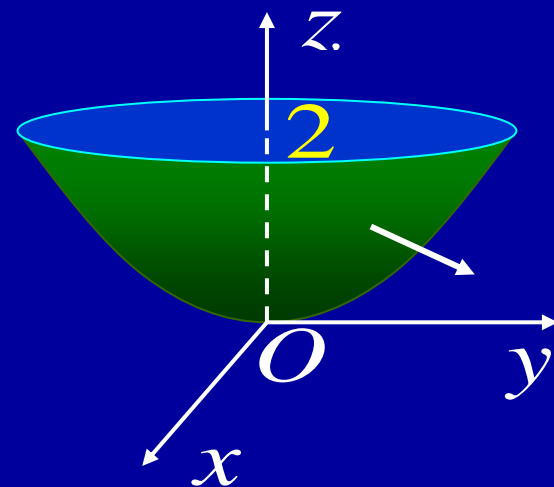
$$\iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{dS} = \iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_n = \vec{A} \cdot \vec{n} \text{ (} \vec{A} \text{ 在 } n \text{ 上的投影)} \\ = \iint_{\Sigma} A_n dS \end{array} \right.$$





**例3.** 计算曲面积分  $\iint_{\Sigma} (z^2 + x) \, dy \, dz - z \, dx \, dy$ , 其中  $\Sigma$  旋转抛物面  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  介于平面  $z=0$  及  $z=2$  之间部分的下侧.



**解:** 利用两类曲面积分的联系, 有

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} (z^2 + x) \, dy \, dz \\ &= \iint_{\Sigma} (z^2 + x) \cos \alpha \, dS \\ &= \iint_{\Sigma} (z^2 + x) \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} \, dx \, dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \\ \cos \gamma &= \frac{-1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{原式} = \iint_{\Sigma} [(z^2 + x)(-x) - z] \, dx \, dy$$



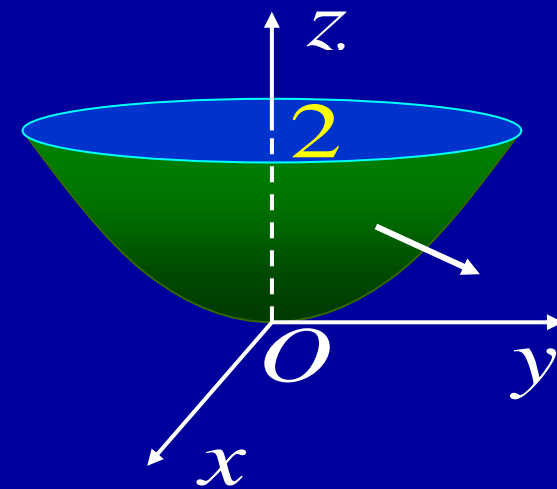
将  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  代入, 得

$$\text{原式} = - \iint_{D_{xy}} \left\{ \left[ \frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2 + x \right](-x) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right\} dx dy$$

$$= \iint_{D_{xy}} \left[ x^2 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right] dx dy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (r^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{2} r^2) r dr$$

$$= 8\pi$$



# 作业

P231

3 (1) ,(2) , (3), (4) ;



## 内容小结

### 1. 两类曲面积分及其联系

定义:

$$\bullet \iint_{\Sigma} f(x, y, z) \mathrm{d} S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

$$\begin{aligned} \bullet \iint_{\Sigma} P \mathrm{d} y \mathrm{d} z + Q \mathrm{d} z \mathrm{d} x + R \mathrm{d} x \mathrm{d} y \\ = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left[ P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{yz} \right. \\ \quad \left. + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{zx} \right. \\ \quad \left. + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xy} \right] \end{aligned}$$



性质: 
$$\iint_{\Sigma^-} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy$$
$$= - \iint_{\Sigma} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy$$

联系: 
$$\iint_{\Sigma} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy$$
$$= \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) \, dS$$

思考:

两类曲面积分的定义一个与  $\Sigma$  的方向无关, 一个与  $\Sigma$  的方向有关, 上述联系公式是否矛盾?



## 2. 常用计算公式及方法

面积分  $\left\{ \begin{array}{l} \text{第一类 (对面积)} \\ \text{第二类 (对坐标)} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{转化}} \text{二重积分}$

(1) 统一积分变量 —— 代入曲面方程  
(方程不同时分片积分)

(2) 积分元素投影  $\left\{ \begin{array}{l} \text{第一类: 面积投影} \\ \text{第二类: 有向投影} \end{array} \right.$

(4) 确定积分域 —— 把曲面积分域投影到相关坐标面

**注:** 二重积分是第一类曲面积分的特殊情况.



当  $\Sigma : z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$  时,

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) \mathrm{d} S = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \mathrm{d} x \mathrm{d} y$$

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) \mathrm{d} x \mathrm{d} y = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) \mathrm{d} x \mathrm{d} y$$

( 上侧取 “+”, 下侧取 “-” )

类似可考虑在  $yOz$  面及  $zOx$  面上的二重积分转化公式.





## 思考与练习

### 1. P231 题2

**提示:** 设  $\Sigma : z = 0, (x, y) \in D_{xy}$ , 则

$\Sigma$  取上侧时,

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) \, dx \, dy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, 0) \, dx \, dy$$

$\Sigma$  取下侧时,

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) \, dx \, dy = - \iint_{D_{xy}} R(x, y, 0) \, dx \, dy$$



**P231 题3(3).** 设  $f(x, y, z) \in C$ ,  $\Sigma$  是平面  $x - y + z = 1$  在第四卦限部分的上侧, 计算

$$I = \iint_{\Sigma} [f(x, y, z) + x] dy dz + [2f(x, y, z) + y] dz dx + [f(x, y, z) + z] dx dy$$

**提示:** 求出  $\Sigma$  的法方向余弦, 转化成第一类曲面积分

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (x - y + z) dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} dS \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^1 dx \int_{x-1}^0 \sqrt{3} dy = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



**备用题** 求  $I = \oiint_{\Sigma} \left( \frac{dy dz}{x} + \frac{dz dx}{y} + \frac{dx dy}{z} \right)$ , 其中  
 $\Sigma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  取外侧.

**解:** 
$$\oiint_{\Sigma} \frac{dx dy}{z} = \frac{2}{c} \iint_{D_{x,y}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} dx dy$$

注意 ± 号

$$D_{x,y}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

$$x = ar \cos \theta, y = br \sin \theta, dx dy = abr dr d\theta$$

$$= \frac{2}{c} ab \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr = \frac{1}{c^2} \cdot 4\pi abc$$



$$\oiint_{\Sigma} \frac{dx dy}{z} = \frac{1}{c^2} \cdot 4\pi abc$$

利用轮换对称性

$$\oiint_{\Sigma} \frac{dy dz}{x} = \frac{1}{a^2} \cdot 4\pi abc$$

$$\oiint_{\Sigma} \frac{dz dx}{y} = \frac{1}{b^2} \cdot 4\pi abc$$

$$\therefore I = 4\pi abc \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)$$

