第六节

高斯公式　*通量与散度

Green 公式 $\xrightarrow{\text{推广}}$ Gauss 公式

一、高斯公式

*二、沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件

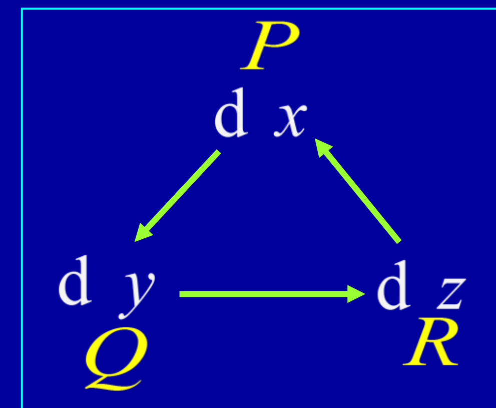
*三、通量与散度

一、高斯 (Gauss) 公式

定理1. 设空间闭区域 Ω 由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成，Σ 的方向取外侧，函数 P, Q, R 在 Ω 上有连续的一阶偏导数，则有

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



(Gauss 公式)

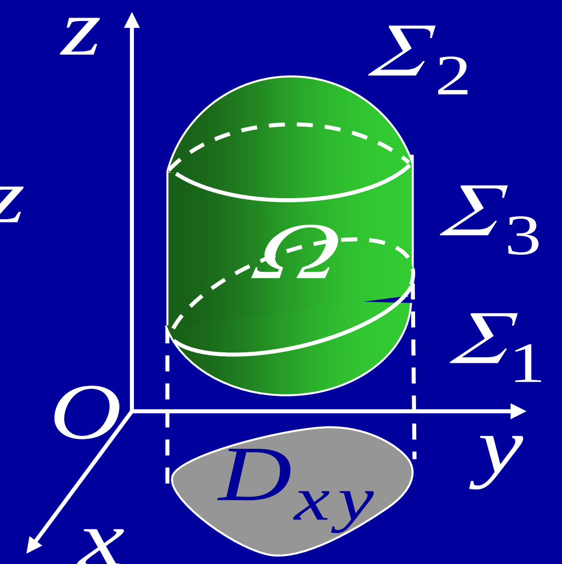
下面先证:

$$\iiint_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma} R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

证明: 设 $\Omega: z_1(x,y) \le z(x,y) \le z_2(x,y),\ (x,y)\in D_{xy}$

称为 XY-型区域， $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$, $\Sigma_1: z = z_1(x,y)$,

$\Sigma_2: z = z_2(x,y)$, 则



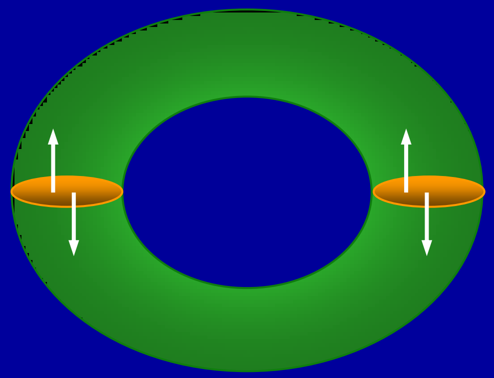
$$\iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}z$$

$$= \iint_{D_{xy}} \{ R(x,y,z_2(x,y)) - R(x,y,z_1(x,y)) \}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\oiint_\Sigma R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\iint_{\Sigma_2} + \iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_3}\right) R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_{xy}} R(x,y,z_2(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{D_{xy}} R(x,y,z_1(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

所以 $$\iiint_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma}R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



若 Ω 不是 XY–型区域， 则可引进辅助面

将其分割成若干个 XY–型区域， 在辅助面

正反两侧面积分正负抵消， 故上式仍成立 .

类似可证 $$\iiint_{\Omega}\frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma}P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$\iiint_{\Omega}\frac{\partial Q}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma}Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

三式相加, 即得所证 Gauss 公式:

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$=\oiint_{\Sigma}P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

例1. 用Gauss 公式计算 $\iint_{\Sigma}(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+(y-z)x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

其中Σ为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0\,,\,z=3$ 所围空间闭域 Ω 的整个边界曲面的外侧.

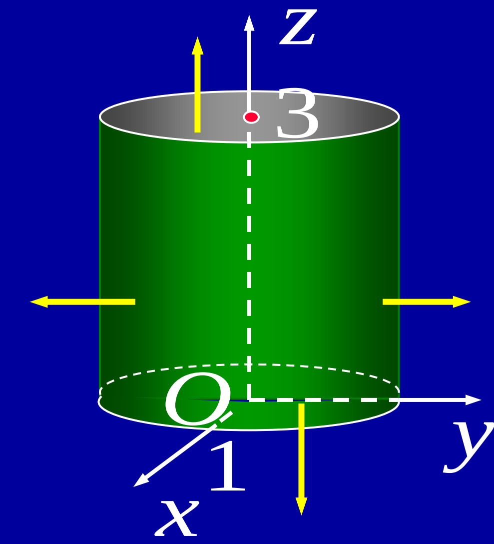
解: 这里 $P=(y-z)x,\ Q=0,\ R=x-y$

利用Gauss 公式, 得

$$原式=\iiint_{\Omega}(y-z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\iiint_{\Omega}(\rho\sin\theta-z)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\,\mathrm{d}\rho\int_0^3(\rho\sin\theta-z)\,\mathrm{d}z=-\frac{9\pi}{2}$$

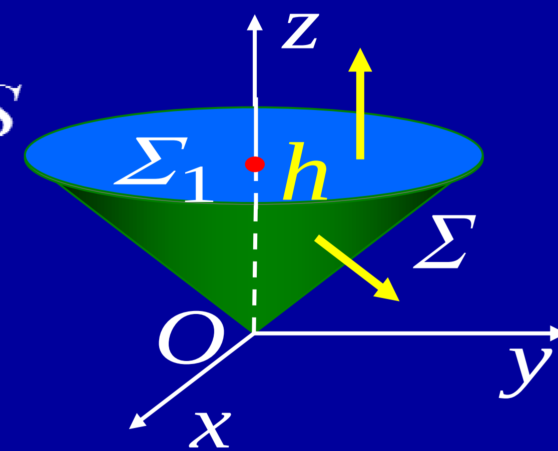


思考: 若 Σ 改为内侧, 结果有何变化?

若 Σ 为圆柱侧面(取外侧) , 如何计算?

例2. 利用Gauss 公式计算积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$



其中Σ为锥面 $x^2+y^2=z^2$介于$z=0$及$z=h$之间部分的下侧, α,β,γ为法向量的方向角.

解: 作辅助面

$$\Sigma_1: z=h,\ (x,y)\in D_{xy}: x^2+y^2\le h^2, \text{取上侧}$$

记Σ,Σ_1所围区域为Ω, 则 $\boxed{在\ \Sigma_1\ 上\ \alpha=\beta=\frac{\pi}{2},\gamma=0}$

$$I=\left(\oiint_{\Sigma\cup\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}\right)(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

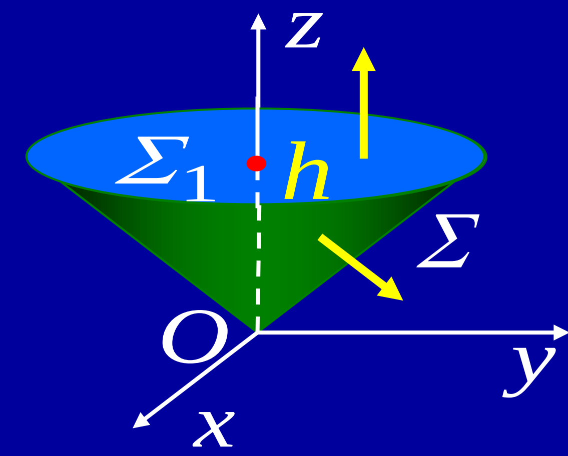
$$=2\iiint_{\Omega}(x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-\iint_{D_{xy}}h^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$I = 2\iiint_{\Omega}(x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \iint_{D_{xy}} h^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

利用质心公式，得 $\bar{x} = \bar{y} = 0$

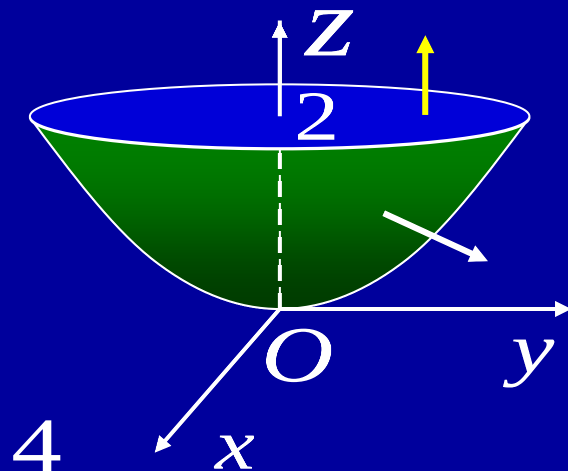
$$= 2\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \pi h^4$$

$$= 2\int_0^h z \cdot \pi z^2\,\mathrm{d}z - \pi h^4 = -\tfrac{1}{2}\pi h^4$$



思考: 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}(z^2+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

$\Sigma: z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=2$ 之间部分的下侧.



提示: 作取上侧的辅助面 $\Sigma_1: z = 2,$

$$(x, y) \in D_{xy}: x^2 + y^2 \le 4$$

例3. 设函数 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 在闭区域 Ω 上具有一阶和二阶连续偏导数, 证明格林(Green)第一公式

$$P = u\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$Q = u\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$R = u\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\iiint_{\Omega} u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= \oiint_{\Sigma} u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

$$-\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

其中 Σ 是整个 Ω 边界面的外侧.

注意: 高斯公式

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= \oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

证: 令 $P=u\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $Q=u\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $R=u\dfrac{\partial v}{\partial z}$, 由高斯公式得

$$\iiint_{\Omega}\Big[u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\Big]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$$

$$=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

移项即得所证公式.

第七节 斯托克斯公式 *环流量与旋度

一、斯托克斯公式

*二、空间曲线积分与路径无关的条件

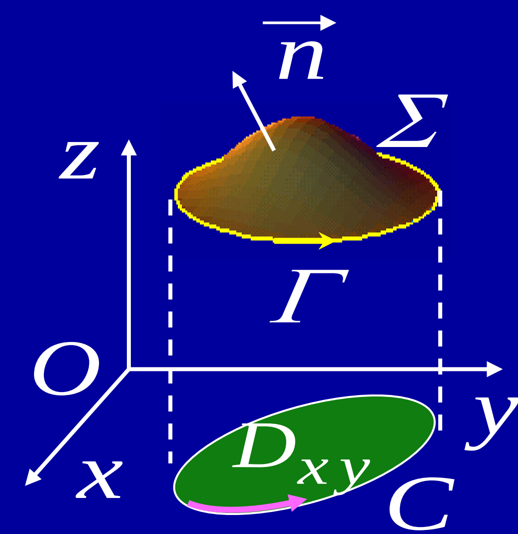
*三、环流量与旋度

一、 斯托克斯公式

定理1. 设光滑曲面Σ的边界Γ是分段光滑曲线， Σ 的侧与 Γ的正向符合**右手法则**， P, Q, R在包含Σ在内的一个空间域内具有连续一阶偏导数， 则有

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\oint_{\Gamma}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$



(斯托克斯公式)

注意: 如果Σ是 xOy 面上的一块平面区域,

则斯托克斯公式就是格林公式,

故格林公式是斯托克斯公式的特例.

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}\,z\,\mathrm{d}\,x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

$$=\oint_{\Gamma}P\,\mathrm{d}\,x+Q\,\mathrm{d}\,y+R\,\mathrm{d}\,z$$

为便于记忆，斯托克斯公式还可写作:

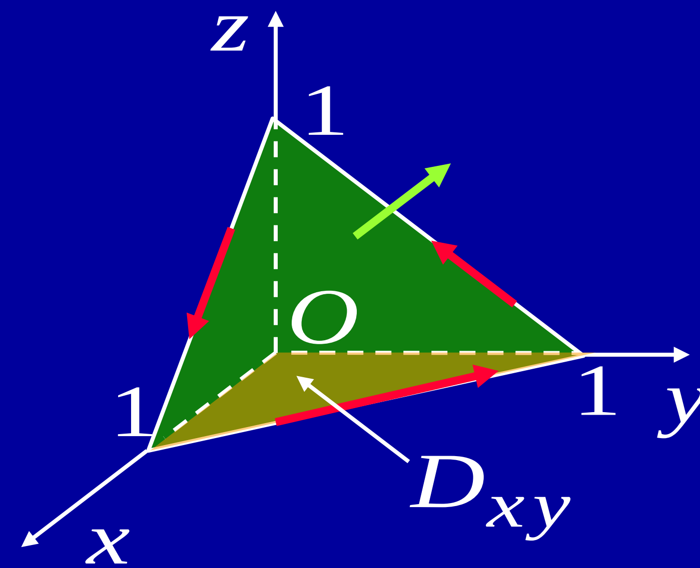
$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

或用第一类曲面积分表示:

$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}\mathrm{d}S = \oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

例1. 利用斯托克斯公式计算积分 $\oint_{\Gamma} z\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z$

其中Γ为平面 $x+y+z=1$ 被三坐标面所截三角形的整个边界, 方向如图所示.



解: 记三角形域为Σ, 取上侧, 则

$$\oint_{\Gamma} z\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z$$

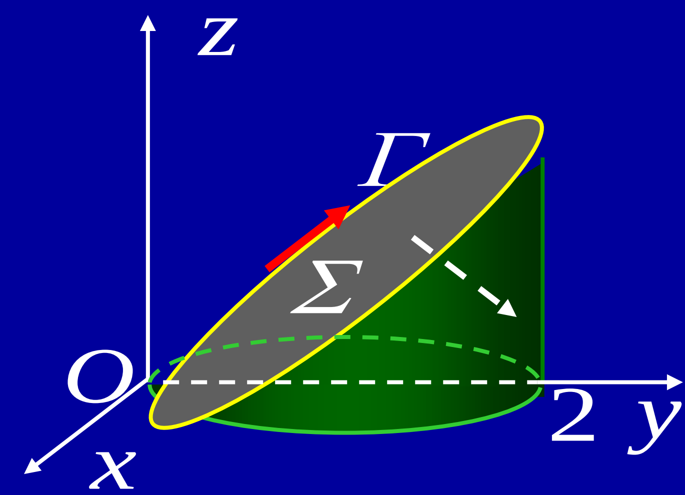
$$= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

$$= \iint_{\Sigma} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 3\iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{3}{2}$$

利用对称性

例2. Γ为柱面 $x^2+y^2=2y$与平面 $y=z$ 的交线, 从 z 轴正向看为顺时针, 计算 $I=\oint_\Gamma y^2\,\mathrm{d}x+xy\,\mathrm{d}y+xz\,\mathrm{d}z$.

解: 设Σ为平面 $z=y$ 上被 Γ 所围椭圆域, 且取下侧, 则其法线方向余弦



$$\cos\alpha=0\,,\ \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\ \cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

利用斯托克斯公式得

$$I=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & xy & xz \end{vmatrix} \mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_\Sigma (y-z)\,\mathrm{d}S=0$$

作业

P239

1 (1), (4), (5);