12/13 浙江工业大学高等数学 A(下)考试试卷

学院: ________ 班级: _______ 姓名:_________ 学号:_________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总 分
得 分								

一、填空题（每小题 3 分）：

1、向量 $\vec{a}=(4,-3,4)$ 在向量 $\vec{b}=(2,2,1)$ 上的投影是____2____。

2、设 $\vec{a}=(2,1,2)$，$\vec{b}=(4,-1,10)$，$\vec{c}=\vec{b}-l\vec{a}$，且 $\vec{a}\perp\vec{c}$，则 $l=$____3____。

3、已知 $z=xy+\dfrac{x}{y}$，则 $dz=$ $(y+\dfrac{1}{y})dx+(x-\dfrac{x}{y^2})dy$

4、隐函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $xyz=e^z$ 确定，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ $\dfrac{yz}{e^z-xy}$

5、设 $f(u,v)$ 一阶偏导数连续，且 $z=f(x^2-y^2,e^{xy})$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ $2xf_1'+ye^{xy}f_2'$

6、函数 $u=3x^2y^2-2y+4x+6z$ 在原点沿 $\overrightarrow{OA}=(1,1,1)$ 方向的方向导数是 $\dfrac{8}{\sqrt{3}}$

7、函数 $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$ 的极大值点（或极大值）是 （2，-2）、8

8、交换积分次序 $\int_0^2 dy\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx=$ $\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$

9、设 Ω：$x^2+y^2+z^2\le 1$，$z\ge 0$，则 $\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)dv=$ $\dfrac{2p}{5}$

10、设 L 为 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，则 $\oint_L (x^2+y^2)ds=$ $2p a^3$

11、把 $\dfrac{1}{2-3x}$ 展开为 x 的幂级数，则该级数的收敛半径 $R=$ $\dfrac{2}{3}$

二、试解下列各题（每小题 7 分）：

1、求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-3x=0\\2x-3y+5z-4=0\end{cases}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线方程与法平面方程。

解： 切向量 $\vec{T}=(16,9,-1)$ 3 分

切线方程 $\dfrac{x-1}{16}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z-1}{-1}$ 5 分

法平面方程 $16x+9y-z=24$ 7 分

2、求平面$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{5}=1$和柱面$x^2+y^2=1$的交线上与$xOy$平面距离最短的点。

解：记　$F(x,y,z)=z+l\,(\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{5}-1)+m(x^2+y^2-1)$　　3 分

$$\begin{cases} F_x=\dfrac{l}{3}+2mx=0 \\ F_y=4+2my=0 \\ F_z=1+\dfrac{l}{5}=0 \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{5}=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

解得最短点的坐标是$(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5},\dfrac{35}{12})$　　7 分

3、设函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$，讨论函数在点$(0,0)$处的连续性及在该点偏导数的存在性。

解：由　$2xy\le x^2+y^2$　可得　$0\le\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\le\dfrac{1}{4}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}$　　2 分

$\because \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{4}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}=0$，　$\therefore \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}=0=f(0,0)$　　4 分

所以函数在点$(0,0)$连续。

由　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0-0}{x}=0$，

知函数在点$(0,0)$处关于x的偏导数存在；同理可知关于y的偏导数存在。　7 分

三、（6 分）判断下列等式是否正确（在括弧内填入√或×）：

设Σ是球面$x^2+y^2+z^2=R^2$（外侧），Σ_1是球面Σ在第一卦限中的部分。

1、$\displaystyle\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}R^2dS$　　（ √ ）

2、$\displaystyle\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dxdy=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}R^2dxdy$　　（ √ ）

3、$\displaystyle\iint_{\Sigma}zdS=8\iint_{\Sigma_1}zdS$　　（ × ）

四、试解下列各题（每小题 7 分）：

1、求 $\iint\limits_{D} x d s$ ，其中 D 是由直线 $y=x, y=0$ 及曲线 $x^2+y^2=4$ ， $x^2+y^2=1$ 所围在第一象限内的闭区域。

解： $$\iint\limits_{D} x d s = \int_0^{\frac{p}{4}} dq \int_1^2 r^2 \cos q \, d r \qquad 4 \text{ 分}$$

$$= \frac{7\sqrt{2}}{6} \qquad 7 \text{ 分}$$

2、求曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} \frac{dS}{x^2+y^2+z^2}$ ，其中 $\sum$ 是介于平面 $z=0$ 及 $z=h$ 之间的圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 。

解： $$\iint\limits_{\Sigma} \frac{dS}{x^2+y^2+z^2} = \iint\limits_{\Sigma_1} \frac{dS}{x^2+y^2+z^2} + \iint\limits_{\Sigma_2} \frac{dS}{x^2+y^2+z^2} \qquad 2 \text{ 分}$$

$$= 2\iint\limits_{D_{xz}} \frac{1}{R^2+z^2} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}} dxdz \qquad 5 \text{ 分}$$

$$= 2p \arctan \frac{h}{R} \qquad 7 \text{ 分}$$

3、求 $\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$，其中 $\sum$ 是曲面 $z^2=x^2+y^2$ 在 $0 \le z \le 1$ 之间部分的下侧。

解：补上曲面 $\sum_1 : z=1 \ (x^2+y^2 \le 1)$ 的上侧，则有

$$\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy = \oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint\limits_{\Sigma_1}$$

而 $$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy = 2\iiint\limits_{\Omega} (x+y+z)dv = \frac{1}{2}p \qquad 5 \text{ 分}$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy = p$$

从而 $$\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy = -\frac{1}{2}p \qquad 7 \text{ 分}$$

五、（6 分）判别级数（1） $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1+\frac{1}{n})$； （2） $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} (1+\frac{1}{n})^{n^2}$ 的收敛性。

解：（1） $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n (1+\frac{1}{n}) \neq 0$ ， 所以级数发散。 3 分

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}(1+\frac{1}{n})^n=\frac{e}{3}<1$，　　所以级数收敛。　　　3 分

六、（**9 分**）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 的收敛域（含端点）及和函数。

解：$\mathbf{Q}\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{2n+1}}{2n+1}}{\frac{x^{2n-1}}{2n-1}}\right|=\left|x^2\right|$，所以幂级数的收敛半径是 $R=1$　　　　2 分

当 $x=\pm1$ 时，级数 $\pm\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 是发散的，所以幂级数的收敛域是 $(-1,1)$　　3 分

记 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\quad -1<x<1$，

逐项求导 $f'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}\quad -1<x<1$

积分得和函数　$f(x)=\int_0^x f'(x)dx=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\quad -1<x<1$　　　9 分

七、（4 分）：证明不等式　$1\le\iint\limits_D\left[(\cos(y^2)+\sin(x^2)\right]ds\le\sqrt{2}$，其中 D 是正方形区域 $0\le x\le1,0\le y\le1$。

解：由于积分区域关于直线 $y=x$ 对称，故有 $\iint\limits_D\cos(y^2)ds=\iint\limits_D\sin(x^2)ds$

从而　$\iint\limits_D\left[(\cos(y^2)+\sin(x^2)\right]ds=\iint\limits_D\left[(\cos(x^2)+\sin(x^2)\right]ds$　　　2 分

而　$$\cos(x^2)+\sin(x^2)=\sqrt{2}\sin(x^2+\frac{p}{4})$$

$$1\le\sqrt{2}\sin(x^2+\frac{p}{4})\le\sqrt{2}\qquad 0\le x\le1$$

所以有　$1\le\iint\limits_D\left[(\cos(y^2)+\sin(x^2)\right]ds\le\sqrt{2}$　　　4 分