13/14(二)浙江工业大学高等数学 A 考试试卷 A

学院：________ 班级：_______ 姓名:_________ 学号:_________
任课教师（请务必填上）:_________

一、填空选择题（本题满分 36 分，每小题 3 分）

1、已知向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 及 x 轴均垂直，且 $\vec{b}=3\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$，$|\vec{a}|=10$，则 $\vec{a}=$ $\underline{(0,8,6)}$。

2、过点（-1，2，-3）且与向量 $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$ 垂直的平面方程是 $\underline{x-2y-z+2=0}$。

3、过点 $M(0,2,4)$ 且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行的直线方程 $\underline{\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-4}{1}}$。

4、设 $z=y^x\ln y$，则 $dz=\underline{y^x\ln^2 ydx+(xy^{x-1}\ln y+y^{x-1})dy}$。

5、设 $z=f(\dfrac{x}{y},y)$，其中 $f(x,y)$ 偏导数连续，则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\underline{-\dfrac{x}{y^2}f_1'+f_2'}$。

6、在曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2$ 上有一点 M，在该点曲面的切平面平行于平面 $2x+2y-z=0$，则点 M 的坐标是 $\underline{(2,1,3)}$。

7、交换积分次序 $\int_0^2 dy\int_{y^2}^{2y}f(x,y)dx=\underline{\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}}f(x,y)dy}$。

8、二次积分 $\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}f(\dfrac{y}{x})dy$ 化为极坐标下的二次积分是 $\underline{\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a f(\tan\theta)\rho d\rho}$。

9、设 $\sum$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$（外侧），$\sum_1$ 是球面 $\sum$ 在第一卦限中的部分，Ω 是球 $x^2+y^2+z^2\le R^2$，D 是圆 $x^2+y^2\le R^2$，则下列等式中正确的是（ A ）。

A）$\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=\oiint\limits_{\Sigma}R^2dS$；　B）$\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dxdy=\iint\limits_{D}R^2dxdy$；

C）$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv=\iiint\limits_{\Omega}R^2dv$；　D）$\iint\limits_{\Sigma}xyzdS=4\iint\limits_{\Sigma_1}xyzdS$。

10、下列级数中绝对收敛的是（ A ）。

A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{\pi}{2^n}$；　B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$；　C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n$；　D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\dfrac{(-1)^n}{2n})$。

11、无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$ 是（　C　）。

A）条件收敛；　　B）绝对收敛；　C）发散；　　D）收敛性不定。

12、下列结论中正确的是（　B　）。

A）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充分必要条件是 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$。

B）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充分必要条件是数列 $S_n=\sum_{i=1}^{n}u_i$ 的极限存在。

C）若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足 $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$，则该级数收敛。

D）设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，满足收敛定理条件（狄利克雷条件），则 $f(x)$ 的傅立叶级数收敛且收敛于 $f(x)$

二、试解下列各题（本题满分 14 分，每小题 7 分）：

1、设 $x^2+y^2+z^2-4z=0$，求：$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

解： $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{2-z}$　（3 分）；　$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}$　（7 分）

2、求曲线 $8x=y^3, z=\sqrt[3]{x}$ 在点 $(1,2,1)$ 处的切线方程。

解： 切向量 $\vec{T}=3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$　（3 分）；　切线 $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{1}$　（7 分）

三、试解下列各题（本题满分 14 分，每小题 7 分）：

1、求 $\iint_D (x+y)dxdy$，其中区域 D 由曲线 $x^2-2y+y^2=0$ 所围成。

解： $\iint_D (x+y)dxdy=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}(\rho\cos\theta+\rho\sin\theta)\rho d\rho$　（4 分）

$=\pi$　（7 分）

或　$\iint_D (x+y)dxdy=0+\iint_D ydxdy=\bar{y}D=\pi$　（7 分）

2、求 $\iint_\Sigma (z^2+x)dydz$，期中 $\sum$ 是曲面 $z=x^2+y^2$ 在 $0\le z\le 1$ 之间部分的下侧。

解： 补上平面 $\sum_1: z=1,\quad x^2+y^2\le 1$，利用高斯公式

$$\iint_\Sigma (z^2+x)dydz=\iint_{\Sigma+\Sigma_1}(z^2+x)dydz-\iint_{\Sigma_1}(z^2+x)dydz \quad （3 分）$$

$$=\iiint_\Omega dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_{\rho^2}^1\rho dz=\frac{\pi}{2} \quad （7 分）$$

四、试解下列各题（本题满分 18 分，每小题 9 分）：

1、已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $dz=ydx+xdy$，且 $f(1,1)=2$，求函数 $f(x,y)$ 在闭区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上的最大值和最小值。

解：用全微分求积可得（或凑得）： $z=f(x,y)=xy+1$ （3 分）

由 $\frac{\partial z}{\partial x}=y=0$， $\frac{\partial z}{\partial y}=x=0$ 得，驻点 $(0,0)$， $f(0,0)=1$ （4 分）

在 D 的边界上，求条件极值，利用拉格朗日乘数法

记 $F(x,y)=xy+1+\lambda(x^2+y^2-1)$ （5 分）

由 $\begin{cases} F_x=y+2\lambda x=0 \\ F_y=x+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ 得 4 个驻点：

$$(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2});(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2});(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2});(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$$

比较函数值得：$\min\ z=f(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})=f(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{1}{2}$；

$\max\ z=f(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})=f(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{3}{2}$ （9 分）

2、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的收敛域（含端点）及和函数。

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1$，收敛半径 $R=1$ （2 分）

$x=1$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散； $x=-1$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛；故收敛域是 $[-1,1)$（4 分）

记 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$， 则 $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$

$S(x)=\int_0^x S'(x)dx+S(0)=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)$ $x\in[-1,1)$ （9 分）

五、试解下列各题（本题满分 18 分，每小题 6 分）：

1、设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在光滑平面曲线 L 上连续，证明：$\left|\int_L Pdx+Qdy\right|\le LM$，其中 L 也表示曲线 L 的长度， M 是 $\sqrt{P^2+Q^2}$ 在曲线 L 上的最大值。

解：记 $\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}$，$\vec{T}=\cos\alpha\vec{i}+\cos\beta\vec{j}$（曲线的切向量），$\theta=(\vec{F},\vec{T})$

由二类曲线积分之间的联系，有 $\left|\int_L Pdx+Qdy\right|=\left|\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta)ds\right|$

或 $\left|\int_L Pdx+Qdy\right|=\left|\int_L\vec{F}\cdot\vec{T}ds\right|=\int_L\left|\vec{F}\right|\cos\theta ds$ （3 分）

从而有：$\left|\int_L Pdx+Qdy\right|\le\int_L\left|\sqrt{P^2+Q^2}\right|ds\le\int_L Mds\le LM$ （6 分）

2、求 $\int_L\frac{xdy-ydx}{(x-y)^2}$，$L$：沿曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}-1$ 从点 $A(0,-1)$ 到 $B(1,0)$。

解： 由 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x-y)^4}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 知，积分在单联通区域 $y<x$ 内与路径无关（2 分）

取点 $C(1,1)$，选路径 $\overrightarrow{AC}: y=-1,\ 0\le x\le 1;\quad \overrightarrow{CB}: x=1,\ -1\le y\le 0$

则 $\int_L\frac{xdy-ydx}{(x-y)^2}=\int_{\overline{AC}}+\int_{\overline{CB}}=\int_0^1\frac{dx}{(x+1)^2}+\int_{-1}^0\frac{dy}{(1-y)^2}=1$ （6 分）

3、设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\ne 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$，

问：（1）函数在点 $(0,0)$ 是否连续；（2）函数在点 $(0,0)$ 偏导数是否存在。

解： 略（见教材）

讨论连续，讨论偏导数是否存在（各 3 分）