14/15(二)浙江工业大学高等数学 A 考试试卷 A

学院：_______ 班级：_______ 学号：_________ 姓名：________

任课教师：_________ （请务必填上）

题 号	一	二	三	四	五	六	总分
得 分							

一、填空选择题（本题满分 30 分，每小题 3 分）

1．设向量 $\vec{a}=(4,3,-5)$，$\vec{b}=(1,0,1)$，则 $\vec{a}\times\vec{b}$ = $\underline{3\vec{i}-9\vec{j}-3\vec{k}}$ 。

2．直线 $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{2}$ 与 x 轴正向夹角的余弦是 $\underline{-\dfrac{1}{3}or\dfrac{1}{3}}$ 。

3．过点 $(1,1,1)$ 与直线 $\begin{cases}3x+y-z=2\\2x-z-2=0\end{cases}$ 的平面方程为 $\underline{5x+y-2z=4}$。

4．设 $x^2+y^2+z^2-4z=0$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\underline{\dfrac{x}{2-z}}$。

5．设 $z=f(xy,x^2+y^2)$，f 可微，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\underline{yf_1'+2xf_2'}$。

6．函数 $u=xy^2+z^3-xyz$ 在点 $(1,1,1)$，沿方向 $\vec{l}=(0,1,2)$ 的方向导数是 $\underline{\sqrt{5}}$ 。

7．函数 $f(x,y)=xy$ 在闭区域 $x\geq 0,y\geq 0,x^2+y^2\leq 1$ 上的最大值是 $\underline{1/2}$ 。

8．改变积分次序 $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x} f(x,y)dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2} f(x,y)dy$ = $\underline{\int_1^2 dy\int_y^{y^2} f(x,y)dx}$。

9．设 L 为圆周 $x^2+y^2=R^2$，则 $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\underline{2\pi e^R R}$。

10．将函数 $f(x)=\dfrac{1}{3+x}$ 展开为麦克劳林级数，则该级数的收敛半径是 $\underline{3}$ 。

二、判断题（本题满分 10 分，每小题 2 分）：（正确的填 √，错误的填×）

1．级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{\pi}{2^n}$、$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\dfrac{(-1)^n}{2n})$ 都是绝对收敛的。（ × ）

2．若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛。（ × ）

3．级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充分必要条件是部分和数列 $S_n=\sum_{i=1}^{n}u_i$ 的极限存在。（ √ ）

4．若存在非零常数λ，使得$\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \lambda$，则正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散.（ √ ）

5．设$f(x)$是连续、以2π为周期的周期函数，则$f(x)$的傅立叶级数收敛且收敛于$f(x)$。（ √ ）

三、试解下列各题（本题满分 18 分，每小题 6 分）：

1．设$z=(xy)^x$ （$x,y>0;x,y\neq 1$）求：dz 。

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=(xy)^x(\ln(xy)+1)$；　　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2(xy)^{x-1}$　　5 分

$dz=(xy)^x(\ln(xy)+1)dx+x^2(xy)^{x-1}dy$　　6 分

2．求曲线$x^2+y^2+z^2=6$，$x+y+z=0$在点$(1,-2,1)$处的切线及法平面方程。

解：$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(1,-2,1)}=0$，$\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{(1,-2,1)}=-1$；　　切向量 $\vec{T}=(1,0,-1)$；　　4 分

切线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{-1}$；　　法平面$x-z=0$　　6 分

3．设函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$，讨论函数在点$(0,0)$处（1）是否连续；（2）偏导数是否存在。

解：用定义讨论，1）、2）两问各 3 分。

四、试解下列各题（本题满分 30 分，每小题 6 分）：

1．求 $\iint\limits_D (x+y)^2dxdy$，其中区域 D 由曲线$x^2+y^2=1$所围成。

解：$\iint\limits_D (x+y)^2dxdy=\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy+\iint\limits_D 2xydxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^3d\rho+0$　　4 分

$=\dfrac{\pi}{2}$　　6 分

2．求$\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)dv$，其中$\Omega$是由曲面$4z^2=25(x^2+y^2)$及平面$z=5$所围成的闭区域。

解：$\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho^3d\rho\int_{\frac{5}{2}\rho}^5 dz$　　4 分

$=8\pi$　　6 分

3．求 $\iint\limits_\Sigma (z^2+x)dydz+zdxdy$，其中$\sum$是旋转抛物面$z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$介于平面$z=0,z=2$之间部分的下侧。

解：补上平面$\sum_1: z=2$，上侧，利用高斯公式得：

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz+zdxdy=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}=\iiint_{\Omega}2dv-\iint_{D}2dxdy$$ 3 分

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho d\rho\int_{\frac{1}{2}\rho^2}^{2}2dz-8\pi$$ 5 分

$$=0$$ 6 分

4．求球体 $x^2+y^2+z^2\le 4a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax$（$a>0$）所截得的（含在圆柱面内的部分）立体的体积。

解：由对称性可得 $V=4\iint_{D}\sqrt{4a^2-x^2-y^2}dxdy$ 2 分

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-\rho^2}\rho d\rho$$ 4 分

$$=\frac{32}{3}a^3(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3})$$ 6 分

5．求 $\oint_{L}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$， 其中 L 是曲线 $x^2+4y^2-4=0$ 的正向。

解：令 $P=\frac{-y}{x^2+y^2}$，$Q=\frac{x}{x^2+y^2}$，则有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 2 分

选取适当的 $0<r<1$，作圆周 $l:x^2+y^2=r^2$，取顺时针方向。

在曲线 L 与 l 围成闭区域 D 上利用格林公式有

$$\oint_{L}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\oint_{L+l}-\oint_{l}=0-\oint_{l}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$ 4 分

$$=\int_0^{2\pi}\frac{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}{r^2}d\theta=2\pi$$ 6 分

五、（**8 分**）求：1）幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n$ 的收敛域与和函数；2）数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$ 的和。

解：1）$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+2}{(n+1)!}}{\frac{n+1}{n!}}=0$，收敛域是 $(-\infty,+\infty)$ 2 分

记 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^n+e^x=xe^x+e^x$ 5 分

或 $\int_0^x S(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{n+1}{n!}x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n+1}=xe^x$，

两边求导得 $S(x)=(x+1)e^x$

2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}=S(1)=2e$ 8 分

六、（**4 分**）证明：xOy 平面上曲线 $y=e^x$, $0\le x\le 1$ 绕 x 轴旋转所得旋转面的面积 $S=2\pi\int_1^e\sqrt{1+t^2}\,dt$ 。

解一：旋转面方程是 $x=\dfrac{1}{2}\ln(y^2+z^2)$ ， 1 分

在 yOz 面上的投影区域 $D:1\le y^2+z^2\le e^2$

$$S=\iint\limits_{\Sigma}dS=\iint\limits_{D}\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dydz=\iint\limits_{D}\sqrt{1+\frac{1}{y^2+z^2}}\,dydz \qquad 3 分$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^e\rho\sqrt{1+\frac{1}{\rho^2}}\,d\rho=2\pi\int_1^e\sqrt{1+t^2}\,dt \qquad 4 分$$

解二：利用积分元素法有 $\Delta S=2\pi y\Delta s$ ，

$$S=2\pi\int_l yds=2\pi\int_0^1 y\sqrt{1+y'^2}\,dx\ =2\pi\int_0^1 e^x\sqrt{1+e^{2x}}\,dx=2\pi\int_1^e\sqrt{1+t^2}\,dt$$