15/16 浙江工业大学高等数学 A(下)考试试卷

学院：________ 班级：_______ 姓名:_________ 学号:_________

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
得 分							

任课教师（请务必填上）： _________

一、填空选择题（每小题 3 分）：

1．向量 $\vec{a}=(4,-3,4)$，$\vec{b}=(2,2,1)$，则 $\vec{a}\times\vec{b}=$ $\underline{(-11,4,14)}$ 。

2．设 $f(x,y)=x+(y-1)\arctan(xy)$，则 $f_x(1,1)=$____1____。

3．设 D：$|x|\le 1,\ 0\le y\le 1$.则 $\iint\limits_D x^3e^y dxdy$=____0____。

4．设 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2,(a>0)$，则 $\oint_L (x^2+y^2)^n ds=$ $\underline{2\pi a^{2n+1}}$ 。

5．设 $f(x,y)$ 在 $D: x^2+y^2\le 1$ 上具有连续二阶偏导数，L 是 D 的正向边界，则 $\oint\limits_L [3y+f_x(x,y)]dx+f_y(x,y)dy=$ $\underline{-3\pi}$ 。

6．设 $f(x)=\begin{cases} x^2 & -\pi\le x<0 \\ 4-x^2 & 0\le x\le\pi \end{cases}$，$S(x)$ 是 $f(x)$ 以 2π 为周期的傅里叶级数的和函数，则 $S(3)=$___-5___。

7. 设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处沿某方向 $\vec{l}$ 的方向导数存在,则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处（ D ）

（A）偏导数存在；　　　　（B）可微；

(C) 连续；　　　　（D）A、B、C 都不确定。

8． $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的领域内有定义，且 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$ 则（D ）

（A） $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续；　　　　（B） $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 有极值；

（C） $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全微分 $dz=0$；

（D）曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=y_0 \end{cases}$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处有切线，且切线平行 x 轴，其中 $z_0=f(x_0,y_0)$。

9. 若 $a_n\ge 0$，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则数列 $\{S_n\}$ 有界是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的（ C ）

（A）充分条件，但非必要条件；　　　　（B） 必要条件，但非充分条件；

（C）充分必要条件；　　　　（D） 既非充分条件，又非必要条件。

二、试解下列各题（每小题 6 分）：

1．已知 $z=e^{\frac{y}{x}}$，求：dz

解： $dz=-\dfrac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}dx+\dfrac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}dy$　　6 分

2．设 $z=f(x^2-y^2,e^{xy})$，其中 $f(u,v)$ 二阶偏导数连续，求：$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

解： $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+ye^{xy}f_2'$　　3 分

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f_1'+y^2e^{xy}f_2'+4x^2f_{11}''+4xye^{xy}f_{12}''+y^2e^{2xy}f_{22}''$　　6 分

3．求曲线 $x=\dfrac{t}{1+t}$，$y=\dfrac{1+t}{t}$，$z=t^2$ 在对应于 $t=1$ 点处的切线及法平面方程。

解： 切向量　$\vec{T}=(\dfrac{1}{4},-1,2)$　　2 分

切线　$\dfrac{x-1/2}{1}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z-1}{8}$　　5 分

法平面 $x-4y+8z=\dfrac{1}{2}$　　6 分

4．设一平面垂直于平面 $z=0$，并通过从点 $(1,-1,1)$ 到直线 $\begin{cases} y-z+1=0 \\ x=0 \end{cases}$ 的垂线，求此平面方程。

解： 过点 $(1,-1,1)$ 与直线 $\begin{cases} y-z+1=0 \\ x=0 \end{cases}$ 垂直相交的平面方程是 $y+z=0$，　2 分

该平面与直线的交点 $(0,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$　　4 分

所求平面方程 $x+2y+1=0$　　6 分

三、试解下列各题（每小题 6 分）：

1．求：$\iint\limits_D \dfrac{x^2}{y^2}dxdy$，其中区域 D 由曲线 $x=2$，$y=x$，$xy=1$ 所围成。

解： $\iint\limits_D \dfrac{x^2}{y^2}dxdy=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\dfrac{x^2}{y^2}dy=\dfrac{9}{4}$　　6 分

2．求 $\iiint\limits_\Omega zdxdydz$ 其中 Ω：由 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域。

解： $\iiint\limits_\Omega zdxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}}\rho z dz=\dfrac{7}{12}\pi$　　6 分

3. 计算曲线积分 $\int_L (2x^2+2xy+3y)dx-(x+y+1)dy$，其中 L 是从 $O(0,0)$ 沿曲线 $y=x^2$ 到 $A(1,1)$ 的弧段。

解： 直接代入曲线方程有

$$\int_L (2x^2+2xy+3y)dx-(x+y+1)dy=\int_0^1(3x^2-2x)dx=0$$

6 分

4．求：$\iint\limits_{\Sigma}\frac{z}{x^2+y^2+z^2}dS$，其中 $\sum$ 为下半球面 $z=2-\sqrt{4-x^2-y^2}$ 。

解一： $\iint\limits_{\Sigma}\frac{z}{x^2+y^2+z^2}dS=\iint\limits_{\Sigma}\frac{z}{4z}dS=\frac{1}{4}\iint\limits_{\Sigma}dS=2\pi$

6 分

解二： $D:x^2+y^2\le 4$,

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{z}{x^2+y^2+z^2}dS=\iint\limits_{D}\frac{1}{4}\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}d\sigma=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\frac{\rho}{\sqrt{4-\rho^2}}d\rho=2\pi$$

四、（9 分） 设曲面 $\sum$ 是由曲线段：$\begin{cases}x=0\\ y=e^z\end{cases}$，$0\le z\le 1$，绕 z 轴旋转而成。

（1）写出曲面 $\sum$ 的方程；

（2）计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+2zdxdy$，曲面 $\sum$ 取下侧。

解：（1）曲面 $\sum$ 的方程 $x^2+y^2=e^{2z}$

3 分

（2）解一：利用高斯公式，补曲面 $\sum_1:z=0;\quad \sum_2:z=1$,

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(2x+2y+2)dv-\iint\limits_{\Sigma_1}\quad-\iint\limits_{\Sigma_2}\quad=2\iiint\limits_{\Omega}dv-0-2\iint\limits_{D_2}dxdy$$

6 分

其中：由对称性可知 $\iiint\limits_{\Omega}2xdv=\iiint\limits_{\Omega}2ydv=0$

又：$\iint\limits_{D_2}dxdy=e^2\pi$

$$\iiint\limits_{\Omega}dv=\iiint\limits_{\Omega_1}dv+\iiint\limits_{\Omega_2}dv=\pi+\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^e\rho d\rho\int_{\ln\rho}^1dz=\pi+2\pi\int_1^e\rho(1-\ln\rho)d\rho=\frac{\pi}{2}(e^2-1)$$

$$\iiint\limits_{\Omega}dv=\int_0^1dz\iint\limits_{D_z}dxdy=\int_0^1\pi e^{2z}dz=\frac{\pi}{2}(e^2-1)$$

所以 $\quad I=-\pi(e^2+1)$ 　　9 分

解二：直接计算：$\iint\limits_{\Sigma} 2x^2 dydz = 0$， $\iint\limits_{\Sigma} 2y^2 dxdz = 0$ 6 分

$$\iint\limits_{\Sigma} 2zdxdy = -\iint\limits_{D} \ln(x^2 + y^2) dxdy = -2\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^e \rho \ln \rho d\rho = -\pi(e^2 + 1)$$

所以 $I = -\pi(e^2 + 1)$ 9 分

五、（9 分）求幂级数 $\dfrac{x}{3} + \dfrac{x^2}{2\cdot 3^2} + \dfrac{x^3}{3\cdot 3^3} + \cdots + \dfrac{x^n}{n\cdot 3^n} + \cdots$ 的收敛域（讨论端点）及和函数。

解： $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}}{\dfrac{1}{n\cdot 3^n}} = \dfrac{1}{3}$，收敛半径 $R = 3$ 2 分

$x = 3$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散；$x = -3$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 收敛；故收敛域是 $[-3,3)$ 4 分

记 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot 3^n}$， 则 $S(0) = 0$，

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n\cdot 3^n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \frac{1}{3-x} \qquad 7\text{ 分}$$

$$S(x) = \int_0^x S'(x)dx + S(0) = \int_0^x \frac{1}{3-x}dx = -\ln(3-x) + \ln 3 \quad x\in[-3,3) \qquad 9\text{ 分}$$

六、（7 分）设函数 $z = f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某领域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{1-\cos(x+y)} = -1$

问：（1） $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处偏导数是否存在；（2）点 $(0,0)$ 是不是函数 $f(x,y)$ 的极值点。请说明理由。

解：（1）由条件可知 $f(0,0) = 0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)}{1-\cos x} = -1$， 2 分

从而 $f_x(0,0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)}{1-\cos x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x} = 0$

同理 $f_y(0,0) = 0$ 即 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处偏导数存在 4 分

（2）因为 $1-\cos(x+y) \ge 0$，故由极限的保号性知，存在一个点 $(0,0)$ 的邻域 U，在此邻域内 $f(x,y) \le 0 = f(0,0)$，从而知点 $(0,0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的极大值点。 7 分