16/17 浙江工业大学高等数学 AII 考试试卷

学院：________ 班级：_______ 姓名:_________ 学号:_________

任课教师（请务必填上）：

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
得 分							

一、填空选择题（本题满分 30 分，每小题 3 分）

1、动点 $M(x,y,z)$ 到 xOy 平面的距离与到点 $(1,-1,2)$ 的距离相等，则动点 $M(x,y,z)$ 的轨迹方程是______。$(x-1)^2+(y+1)^2=4z-4$

2、设向量 $\vec{a}=(1,1,1)$，$\vec{b}=(n,2,m)$，$\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}$，$\vec{a}\perp\vec{c}$，则 n,m 应满足条件 $n+m=0$

3、已知 $z=\sqrt{xy}+\dfrac{x}{y}$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________。$\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{y}}-\dfrac{x}{y^2}$

4、曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面方程是____。$x+2y-4=0$

5、交换积分次序 $\int_0^2 dx\int_{\frac{x}{2}}^{3-x} f(x,y)dy=$ _。$\int_0^1 dy\int_0^{2y} f(x,y)dx+\int_1^3 dy\int_0^{3-y} f(x,y)dx$

6、设 L 为 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，则 $\int_L (x^2+y^2)ds=$____。$2p a^3$

7、 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数，则该幂级数收敛区间是__。$(2,4)$

8、若 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，则下列结论错误的是____C_____。

A、 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续； B、 $f_x(x_0,y_0)$，$f_y(x_0,y_0)$ 存在；

C、 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续；

D、曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处有切平面。

9、设 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le R^2$；$\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧，则下列等式正确的是__C__。

A、$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv=\iiint\limits_{\Omega}R^2dv=\dfrac{4p}{3}R^5$；

B、$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dxdy=\iint\limits_{\Sigma}R^2dxdy=pR^4$；

C、$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=\iint\limits_{\Sigma}R^2dS=4pR^4$； D、$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv=0$。

10、下列级数中绝对收敛的级数是____D______。

A、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{n+1}$； B、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}$； C、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$； D、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^2}$。

二、试解下列各题（本题满分 24 分，每小题 6 分）：

1、已知 $z = x^y$，($x > 0$, $x \neq 1$)，求：dz

$$dz = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy$$ **6 分**

2、设 $z = f(xy, e^{xy})$，其中 $f(u,v)$ 一阶偏导数连续，求: $\frac{\partial z}{\partial x}$， $\frac{\partial z}{\partial y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yf_1' + ye^{xy} f_2'$$ **3 分** $$\frac{\partial z}{\partial y} = xf_1' + xe^{xy} f_2'$$ **6 分**

3、证明螺旋线 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$ 是等距螺线（即曲线上任一点的切线与 z 轴夹角是常数）。

曲线任一点处的切向量 $T = (-\sin t, \cos t, 1)$ **3 分**

该向量与 z 轴夹角余弦 $\cos q = \frac{T \bullet k}{|T|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$， 从而得夹角是常数

即螺旋线是等距螺线 **6 分**

4、求一过点 $M(2,1,\frac{1}{3})$ 的平面，使该平面在第一卦限与三个坐标面围成的体积最小。

设平面方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ 则体积 $V = \frac{1}{6}abc$ **2 分**

由平面过点 $M(2,1,\frac{1}{3})$ 得条件 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{3c} = 1$

$$L(a,b,c) = \frac{1}{6}abc + l(\frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{3c} - 1)$$ **4 分**

解得 $a = 6, b = 3, c = 1$ 平面方程为 $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{1} = 1$ **6 分**

三、试解下列各题（本题满分 24 分，每小题 6 分）：

1、设 D: $x^2 + y^2 \leq 1$，求 $\iint\limits_D (x^3 y + x^2 + y^2) dxdy$

$$\iint\limits_D (x^3 y + x^2 + y^2) dxdy = \iint\limits_D x^3 y dxdy + \iint\limits_D (x^2 + y^2) dxdy$$

$$= \int_0^{2p} dq \int_0^1 r^3 dr = \frac{p}{2}$$ **6 分**

2、求$\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$，$\Omega$：由曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与平面$z=2$ 所围成。

$$\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz=\int_0^{2p} dq\int_0^2 r^2 d\,r\int_r^2 zdz$$ **3 分**

$$=\frac{64}{15}p$$ **6 分**

3、求$\int_L (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$，其中$L$沿$y=\sqrt{2x-x^2}$从点$(0,0)$到$(1,1)$。

$\frac{\partial P}{\partial y}=-1=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 积分与路径无关 **2 分**

$$\int_L (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy=\int_0^1 x^2dx-\int_0^1(1+\sin^2 y)dy$$ 4 分

$$=\frac{1}{4}\sin 2-\frac{7}{6}$$ **6 分**

4、求 $\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)dydz$，期中$\sum$是曲面$z=x^2+y^2$在$0\le z\le 1$之间部分的下侧。

补上平面$\sum_1$ $z=1$，由高斯公式有

$$\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)dydz=\iiint\limits_{\Omega} dxdydz-\iint\limits_{\Sigma_1}(z^2+x)dydz$$ **3 分**

$$=\int_0^{2p} dq\int_0^1 r\,d\,r\int_{r^2}^1 dz=\frac{p}{2}$$ **6 分**

四、（8 分）求过点$(2,1,3)$且与直线$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$垂直相交的直线方程。

过点$(2,1,3)$且与所给直线L垂直相交的平面方程是 $3x+2y-z=5$ **3 分**

该平面与直线L的交点$(\frac{2}{7},\frac{13}{7},-\frac{3}{7})$ **6 分**

所求直线方程是$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}$ **8 分**

五、（**9 分**）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 的收敛域（含端点）及和函数。

收敛半径 $R=1$ 端点 $x=\pm1$ 级数不收敛，故收敛域为 $(-1,\ 1)$ **3 分**

记 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 则 $S'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\dfrac{1}{1-x^2}$ **6 分**

从而 $S(x)=\int_0^x S'(x)dx+S(0)=\int_0^x\dfrac{1}{1-x^2}dx=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ **9 分**

六、（**5 分**）讨论偏导数存在与方向导数存在之间的关系（证明或举例）。

方向导数存在未必偏导数存在，讨论见 P104

偏导数存在只能得到沿坐标轴方向的方向导数存在，而沿其它方向的方向导数不一定存在，如 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,\ 0)$ 处。

此题可综合考虑酌情给分。