第十章

重 积 分

一元函数积分学

↓

多元函数积分学 $\left\{\begin{array}{l}\text{重积分}\\ \text{曲线积分}\\ \text{曲面积分}\end{array}\right.$

第一节 二重积分的概念与性质

一、引例

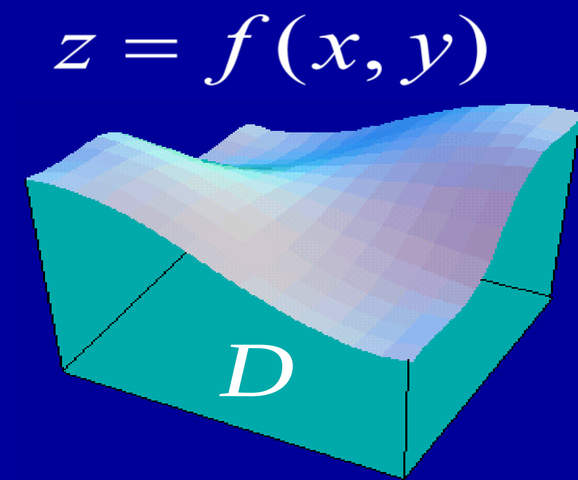
二、二重积分的定义与可积性

三、二重积分的性质

四、曲顶柱体体积的计算

一、引例

1.曲顶柱体的体积



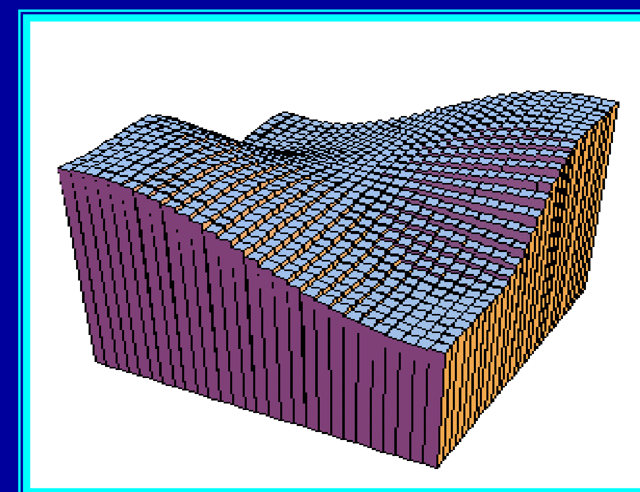
给定曲顶柱体:

底: xOy 面上的闭区域 D

顶: 连续曲面 $z=f(x,y)\geq 0$

侧面: 以 D 的边界为准线, 母线平行于 z 轴的柱面

求其体积.



解法: 类似定积分解决问题的思想:

“大化小, 常代变, 近似和, 求极限”

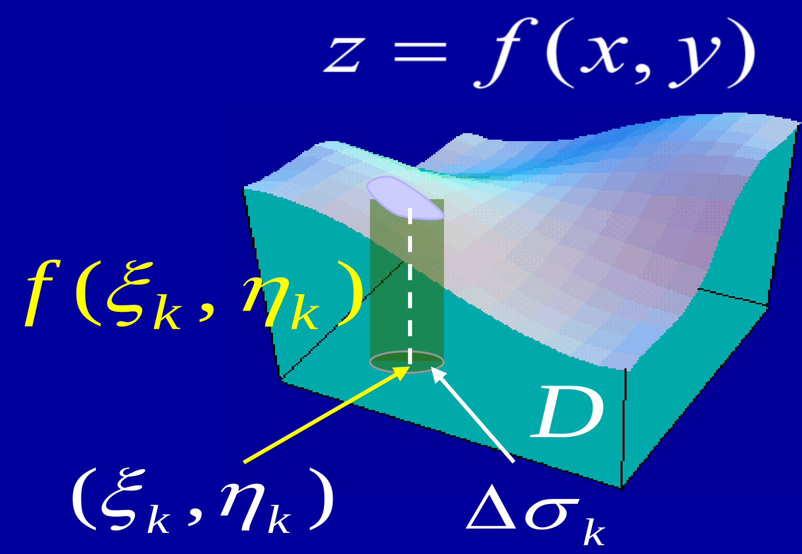
1)“大化小”

用任意曲线网分D为 n 个区域

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$$

以它们为底把曲顶柱体分为 n 个

小曲顶柱体



2)“常代变”

在每个 $\Delta\sigma_k$ 中任取一点 (ξ_k, η_k)，则

$$\Delta V_k \approx f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

3) “近似和”

$$V = \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k$$

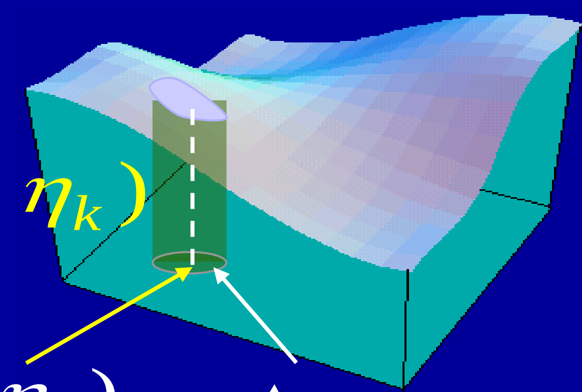
4) “取极限”

定义 $\Delta\sigma_k$ 的直径为

$$\lambda(\Delta\sigma_k) = \max\{\, |P_1P_2| \mid P_1, P_2 \in \Delta\sigma_k \,\}$$

令 $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n}\{\ \lambda(\Delta\sigma_k)\ \}$

$$V = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

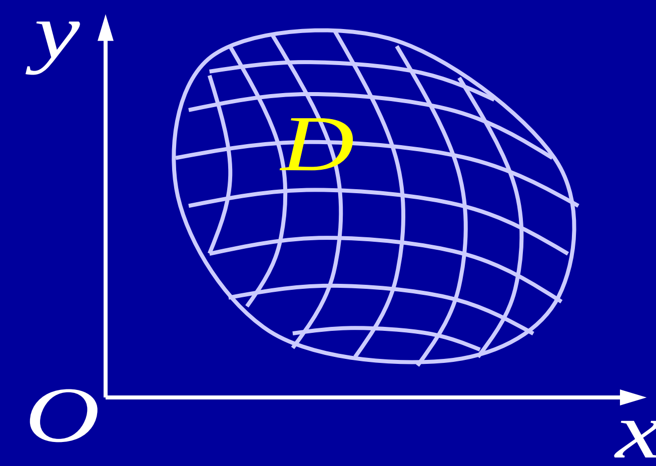


2. 平面薄片的质量

有一个平面薄片, 在 xOy 平面上占有区域 D, 其面密度为 $\mu(x,y)\in C$, 计算该薄片的质量 M.

若 $\mu(x,y)\equiv\mu$ (常数), 设D 的面积为σ, 则

$$M=\mu\cdot\sigma$$



若 $\mu(x,y)$ 非常数, 仍可用

"大化小, 常代变,近似和, 求极限"

解决.

1)"大化小"

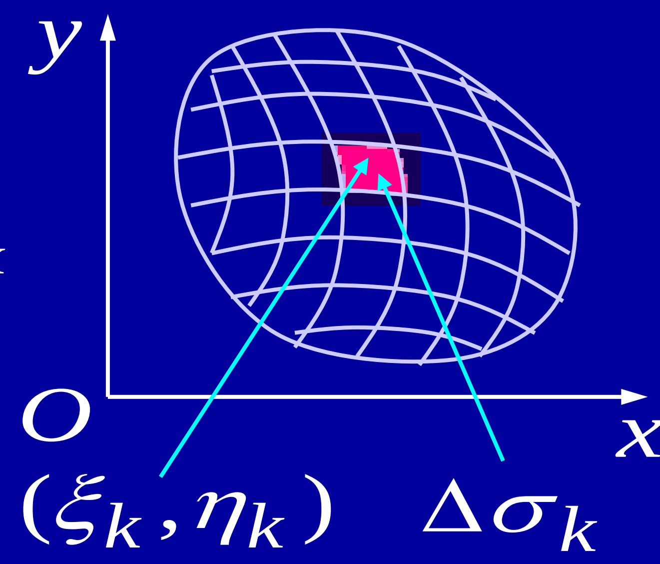
用任意曲线网分D 为 n 个小区域 $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$,

相应把薄片也分为小块 .

2)“常代变”

在每个 $\Delta\sigma_k$ 中任取一点 (ξ_k,η_k), 则第 k 小块的质量

$$\Delta M_k \approx \mu(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k \quad (k=1,2,\cdots,n)$$



3)“近似和”

$$M=\sum_{k=1}^{n}\Delta M_k \approx \sum_{k=1}^{n}\mu(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

4)“取极限”

令 $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}\{\lambda(\Delta\sigma_k)\}$

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\mu(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

两个问题的**共性**:

(1) 解决问题的步骤相同

"大化小, 常代变, 近似和,取极限"

(2) 所求量的结构式相同

曲顶柱体体积:

$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

平面薄片的质量:

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} \mu(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

二、二重积分的定义及可积性

定义: 设 $f(x,y)$ 是定义在有界区域 D 上的有界函数，

将区域 D 任意分成 n 个小区域 $\Delta\sigma_k \ (k=1,2,\cdots,n)$,

任取一点 $(\xi_k,\eta_k)\in\Delta\sigma_k$，若存在一个常数 I，使

$$I=\lim_{\lambda\to 0}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k}_{\text{积分和}} \overset{\text{记作}}{=\!=} \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

则称 $f(x,y)$ **可积**，称 I 为 $f(x,y)$ 在 D 上的**二重积分**.

$$\underbrace{\iint_D}_{\text{积分区域}} \overbrace{\boxed{\underbrace{f(x,y)}_{\text{被积函数}}\underbrace{\mathrm{d}\sigma}_{\text{面积元素}}}}^{\text{积分表达式}}$$

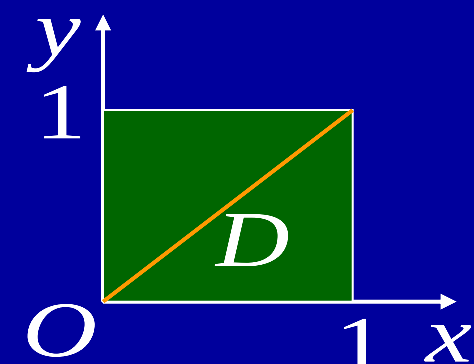
x,y 称为积分变量

二重积分存在定理: (证明略)

定理1. 若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D上连续, 则 $f(x,y)$在D上**可积**.

定理2. 若有界函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上除去有限个点或有限条光滑曲线外都连续, 则$f(x,y)$在D上可积.

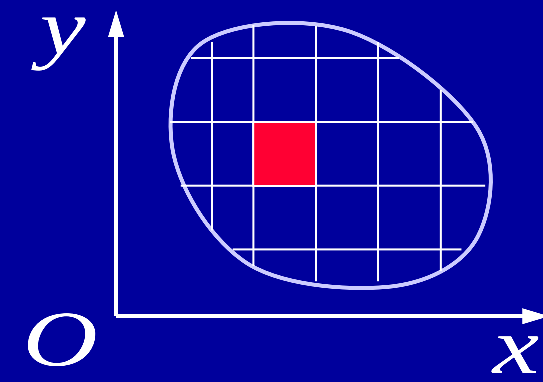
例如, $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x-y}$ 在 $D:\begin{cases}0\le x\le 1\\0\le y\le 1\end{cases}$



上二重积分存在; 但 $f(x,y)=\dfrac{1}{x-y}$ 在D上二重积分不存在.

如果 $f(x,y)$ 在D上可积，可用平行坐标轴的直线来划分区域 D ，这时 $\Delta\sigma_k = \Delta x_k \Delta y_k$ ，因此面积元素$\mathrm{d}\sigma$也常记作 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，二重积分记作

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$



引例1中曲顶柱体体积:

$$V = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

引例2中平面薄板的质量:

$$M = \iint_D \mu(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D \mu(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

三、二重积分的性质

1. $\iint_D k\,f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = k\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ （k 为常数）

2. $\iint_D [f(x,y)\pm g(x,y)]\,\mathrm{d}\sigma$

$$= \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \pm \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

3. $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$

$(D = D_1 \cup D_2\,,\ D_1\,,\ D_2$ 无公共内点$)$

4. 若在 D 上 $f(x,y)\equiv 1$, σ 为 D 的面积, 则

$$\sigma = \iint_D 1\cdot \mathrm{d}\sigma = \iint_D \mathrm{d}\sigma$$

5. 若在D上 $f(x,y) \le \varphi(x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le \iint_D \varphi(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

特别，由于 $-|f(x,y)| \le f(x,y) \le |f(x,y)|$

$$\therefore \quad \left| \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \right| \le \iint_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}\sigma$$

6. 设 $M = \max_D f(x,y)$, $m = \min_D f(x,y)$，D 的面积为σ，

则有 $$m\sigma \le \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le M\sigma$$

7.(二重积分的中值定理) 设函数 $f(x,y)$ 在闭区域D上连续， σ 为D 的面积，则至少存在一点 $(\xi,\eta)\in D$，使

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\sigma$$

证: 由性质6 可知,

$$\min_D f(x,y) \le \frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le \max_D f(x,y)$$

由连续函数介值定理, 至少有一点 $(\xi,\eta)\in D$ 使

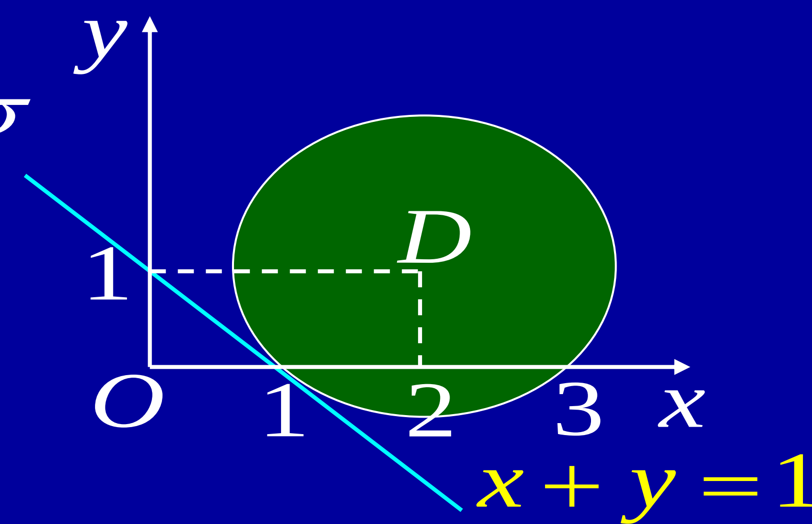
$$f(\xi,\eta) = \frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

因此 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\sigma$$

例1. 比较下列积分的大小:

$$\iint_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma\,,\quad \iint_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma$$

其中 $D:(x-2)^2+(y-1)^2\le 2$



解: 积分域 D 的边界为圆周

$$(x-2)^2+(y-1)^2=2$$

它在与 x 轴的交点 $(1,0)$ 处与直线 $x+y=1$ 相切.

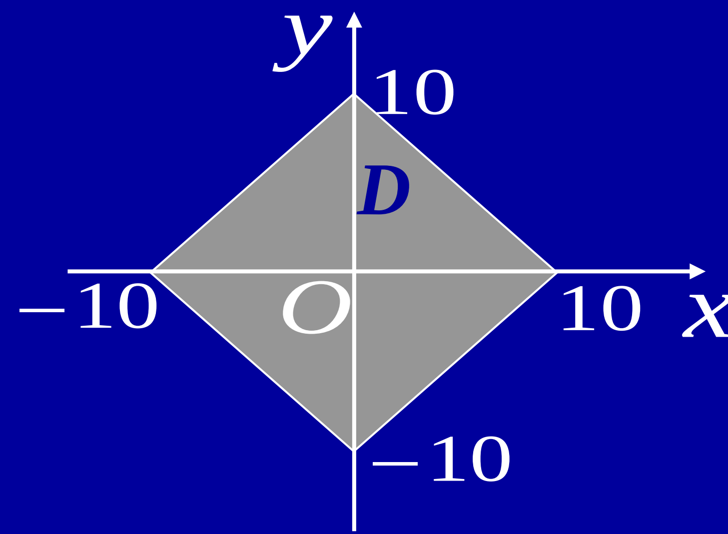
而域 D 位于直线的上方, 故在 D 上 $x+y\ge 1$, 从而

$$(x+y)^2\le (x+y)^3$$

$$\therefore\quad \iint_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma \le \iint_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma$$

例2. 估计下列积分之值

$$I=\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\qquad D:|x|+|y|\le 10$$



解: D 的面积为 $\sigma=(10\sqrt{2})^2=200$

由于

$$\frac{1}{102}\le\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le\frac{1}{100}$$

$\Big\downarrow$ 积分性质5

$$\frac{200}{102}\le I\le\frac{200}{100}$$

即: $1.96\le I\le 2$

10. 1 作　业

P139-140

2，5(3)，6(3)

内容小结

1. 二重积分的定义

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i \quad (\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\mathrm{d}y)$$

2. 二重积分的性质 (与定积分性质相似)