

# 第三节

## 三重积分

一、三重积分的概念

二、三重积分的计算



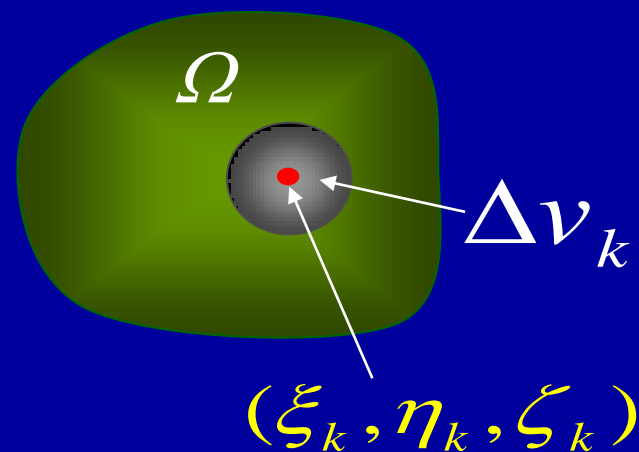
# 一、三重积分的概念

**引例:** 设在空间有限闭区域  $\Omega$  内分布着某种不均匀的物质, 密度函数为  $\mu(x, y, z) \in C$ , 求分布在  $\Omega$  内的物质的质量  $M$ .

**解决方法:** 类似二重积分解决问题的思想, 采用  
“大化小, 常代变, 近似和, 求极限”

可得

$$M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \mu(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta v_k$$



**定义.** 设  $f(x, y, z)$ ,  $(x, y, z) \in \Omega$ , 若对  $\Omega$  作任意分割:  
 $\Delta v_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), 任意取点  $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in \Delta v_k$ , 下列  
“乘积和式” 极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta v_k \stackrel{\text{记作}}{=} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$$

存在, 则称此极限为函数  $f(x, y, z)$  在  $\Omega$  上的三重积分.

$dv$  称为体积元素, 在直角坐标系下常写作  $dx dy dz$ .

**性质:** 三重积分的性质与二重积分相似.



## 二、三重积分的计算

### 1. 利用直角坐标计算三重积分

先假设连续函数  $f(x, y, z) \geq 0$ , 并将它看作某物体的密度函数, 通过计算该物体的质量引出下列各计算方法:

**方法1.** 投影法 (“先一后二” )

**方法2.** 截面法 (“先二后一” )

**方法3.** 三次积分法

最后, 推广到一般可积函数的积分计算.



## 方法1. 投影法 (“先一后二” )

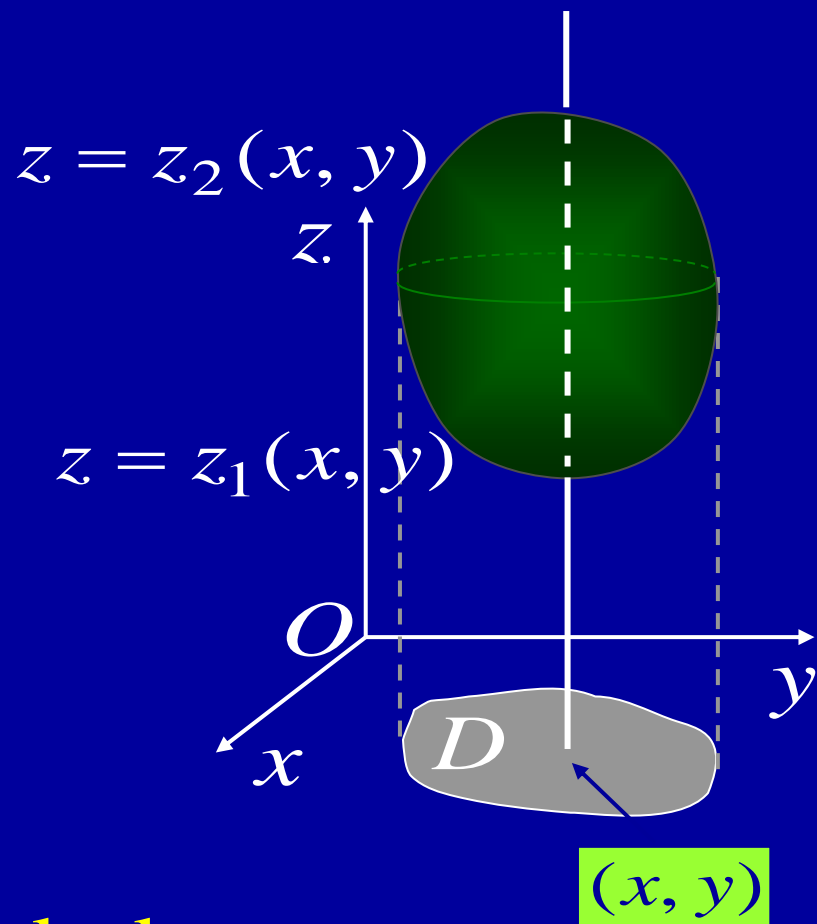
$$\Omega: \begin{cases} (x, y) \in D \\ z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y) \end{cases}$$

细线的质量为

$$\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) \mathrm{d} z$$

该物体的质量为

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(x, y, z) \mathrm{d} v \\ &= \iint_D \left( \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) \mathrm{d} z \right) \mathrm{d} x \mathrm{d} y \\ & \quad \underline{\text{记作}} \quad \iint_D \mathrm{d} x \mathrm{d} y \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) \mathrm{d} z \end{aligned}$$



## 方法2. 截面法 (“先二后一”)

$$\Omega: \begin{cases} (x, y) \in D_z \\ a \leq z \leq b \end{cases}$$

薄片  $D_z$  质量为

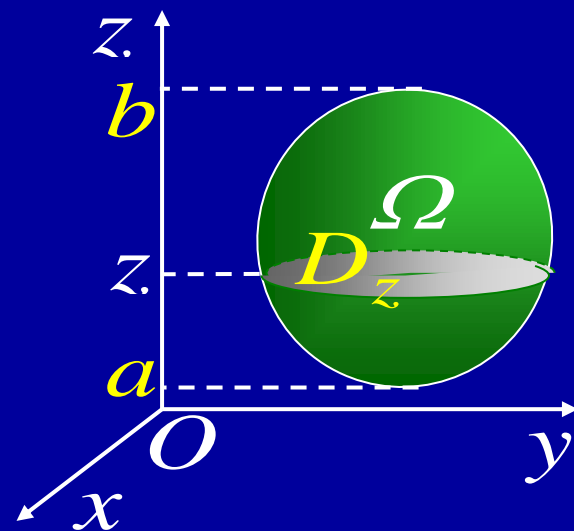
$$\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy$$

该物体的质量为

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$$

$$= \int_a^b \left( \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

$$\underline{\underline{\text{记作}}} \int_a^b dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy$$



### 方法3. 三次积分法

设区域  $\Omega: \begin{cases} (x, y) \in D: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \end{cases} \\ z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y) \end{cases}$

利用投影法结果，把二重积分化成二次积分即得：

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dv \\ = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \end{aligned}$$

---

投影法

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dv = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz$$



当被积函数在积分域上变号时, 因为

$$f(x, y, z)$$

$$= \frac{|f(x, y, z)| + f(x, y, z)}{2} - \frac{|f(x, y, z)| - f(x, y, z)}{2}$$

$$= f_1(x, y, z) - f_2(x, y, z)$$

均为非负函数

根据重积分性质仍可用前面介绍的方法计算.





## 小结: 三重积分的计算方法

### 方法1. “先一后二”

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \mathrm{d} v = \iint_D \mathrm{d} x \mathrm{d} y \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) \mathrm{d} z$$

### 方法2. “先二后一”

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \mathrm{d} v = \int_a^b \mathrm{d} z \iint_{D_z} f(x, y, z) \mathrm{d} x \mathrm{d} y$$

### 方法3. “三次积分”

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \mathrm{d} v = \int_a^b \mathrm{d} x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d} y \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) \mathrm{d} z$$

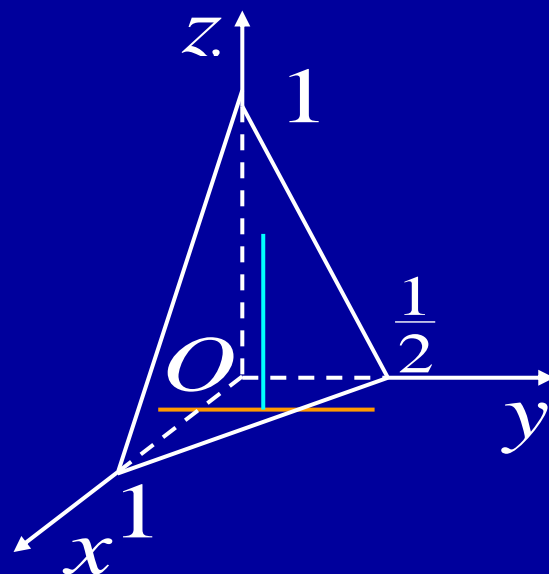
三种方法(包含12种形式)各有特点, 具体计算时应根据被积函数及积分域的特点灵活选择.



**例1.** 计算三重积分  $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  为三个坐标面及平面  $x + 2y + z = 1$  所围成的闭区域.

**解:**  $\Omega: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \frac{1}{2}(1-x) \\ 0 \leq z \leq 1-x-2y \end{cases}$

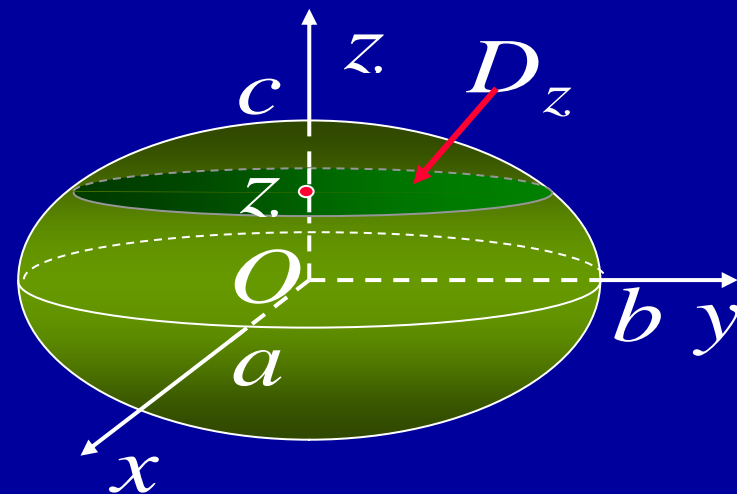
$$\begin{aligned} \therefore \iiint_{\Omega} x dx dy dz &= \int_0^1 x dx \int_0^{\frac{1}{2}(1-x)} dy \int_0^{1-x-2y} dz \\ &= \int_0^1 x dx \int_0^{\frac{1}{2}(1-x)} (1-x-2y) dy \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3) dx = \frac{1}{48} \end{aligned}$$



例2. 计算三重积分  $\iiint_{\Omega} z^2 \, dx \, dy \, dz$ ,

其中  $\Omega: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ .

解:  $\Omega: \begin{cases} -c \leq z \leq c \\ D_z: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{z^2}{c^2} \end{cases}$



用“**先二后一**”

$$\begin{aligned} \therefore \iiint_{\Omega} z^2 \, dx \, dy \, dz &= \int_{-c}^c z^2 \, dz \iint_{D_z} dx \, dy \\ &= \int_{-c}^c z^2 \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = \frac{4}{15} \pi abc^3 \end{aligned}$$



## 2. 利用柱坐标计算三重积分

设  $M(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ , 将  $x, y$  用极坐标  $\rho, \theta$  代替, 则  $(\rho, \theta, z)$  就称为点  $M$  的柱坐标. 直角坐标与柱面坐标的关系:

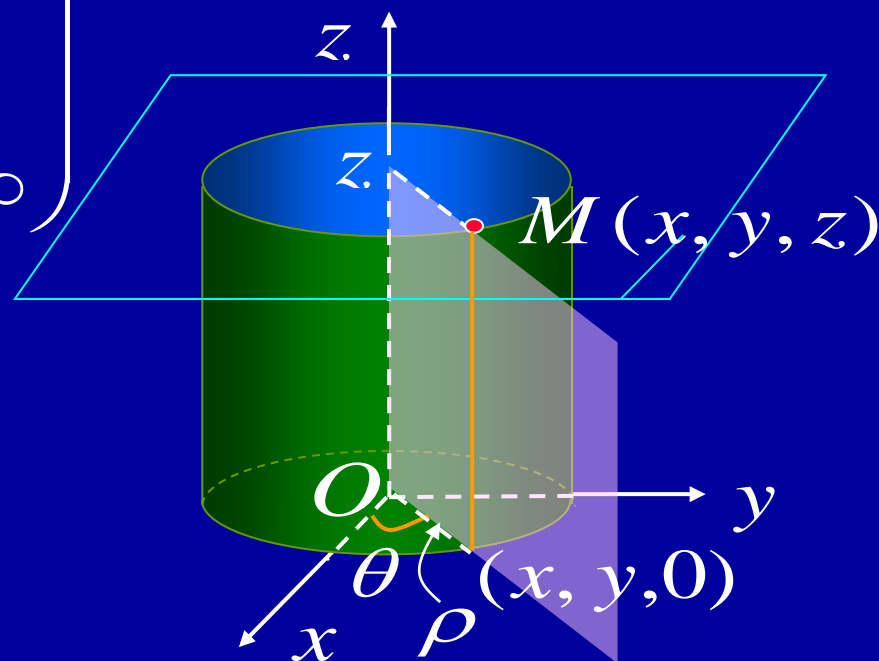
$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq \rho < +\infty \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ -\infty < z < +\infty \end{cases}$$

坐标面分别为

$\rho = \text{常数}$   $\longrightarrow$  圆柱面

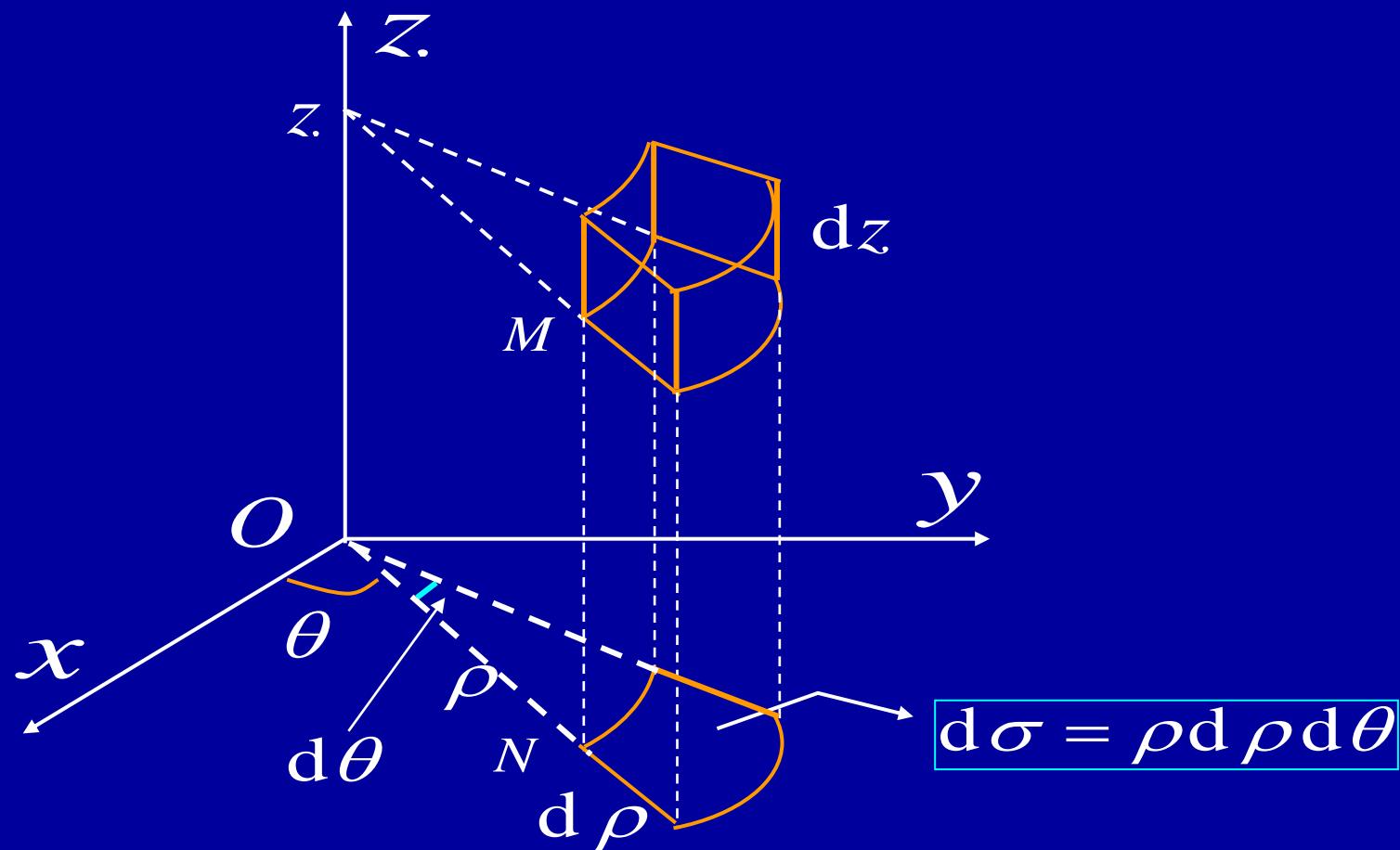
$\theta = \text{常数}$   $\longrightarrow$  过  $z$  轴半平面

$z = \text{常数}$   $\longrightarrow$  平行  $xOy$  面的平面



如图所示, 在柱面坐标系中体积元素为

$$dv = \rho d\rho d\theta dz$$

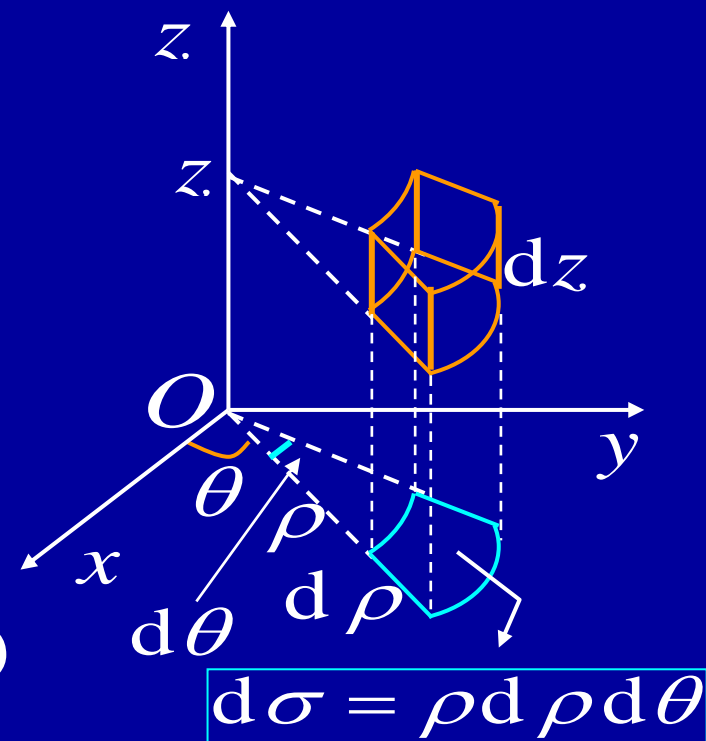


如图所示, 在柱面坐标系中体积元素为

$$d v = \rho d \rho d \theta d z$$

因此 
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) d x d y d z$$
$$= \iiint_{\Omega} F(\rho, \theta, z) \rho d \rho d \theta d z$$

其中  $F(\rho, \theta, z) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)$



适用范围:

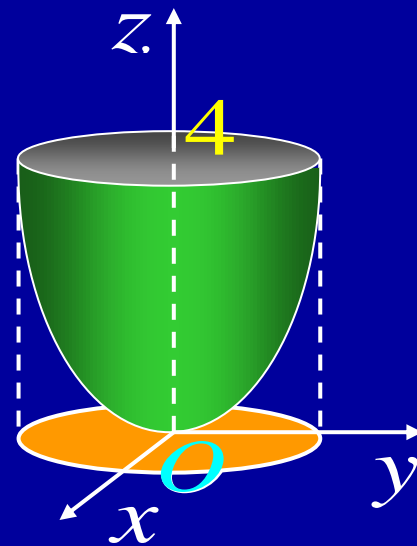
- 1) 积分域表面用柱面坐标表示时方程简单;
- 2) 被积函数用柱面坐标表示时变量互相分离.



**例3.** 计算三重积分  $\iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz$ , 其中  $\Omega$  由抛物面  $x^2 + y^2 = z$  与平面  $z = 4$  所围成.

**解:** 在柱面坐标系下  $\Omega: \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \rho^2 \leq z \leq 4 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho \, d\rho \int_{\rho^2}^4 z \, dz \\ &= \frac{1}{2} 2\pi \int_0^2 \rho(16 - \rho^4) \, d\rho \\ &= \frac{64}{3} \pi \end{aligned}$$



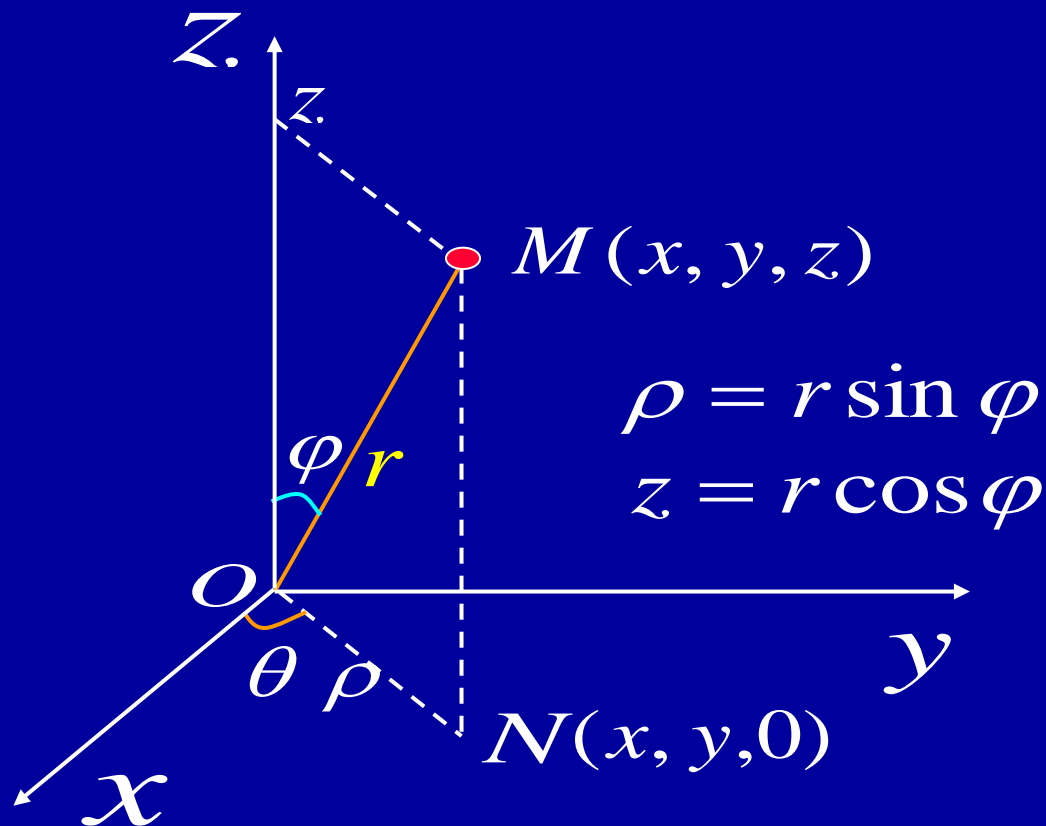
### \*3. 利用球坐标计算三重积分

设  $M(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ , 其柱坐标为  $(\rho, \theta, z)$ , 令  $|\overrightarrow{OM}| = r$ ,  $\angle zOM = \varphi$ , 则  $(r, \theta, \varphi)$  就称为点  $M$  的球坐标.

直角坐标与球面坐标的关系

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \leq r < +\infty \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \end{pmatrix}$$





### \*3. 利用球坐标计算三重积分

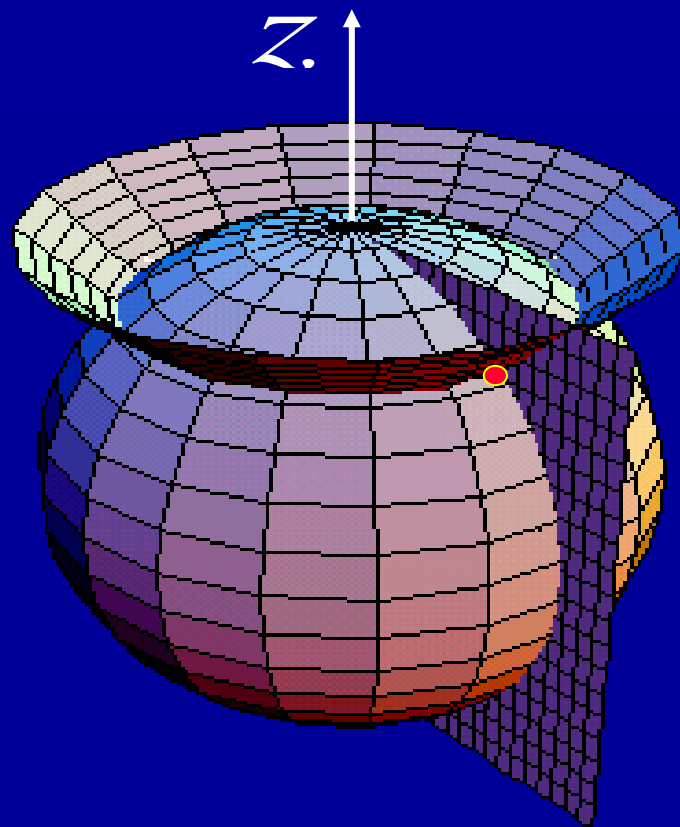
设  $M(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ , 其柱坐标为  $(\rho, \theta, z)$ , 令  $|\overrightarrow{OM}| = r$ ,  $\angle zOM = \varphi$ , 则  $(r, \theta, \varphi)$  就称为点  $M$  的球坐标.

坐标面分别为

$r = \text{常数}$   $\longrightarrow$  球面

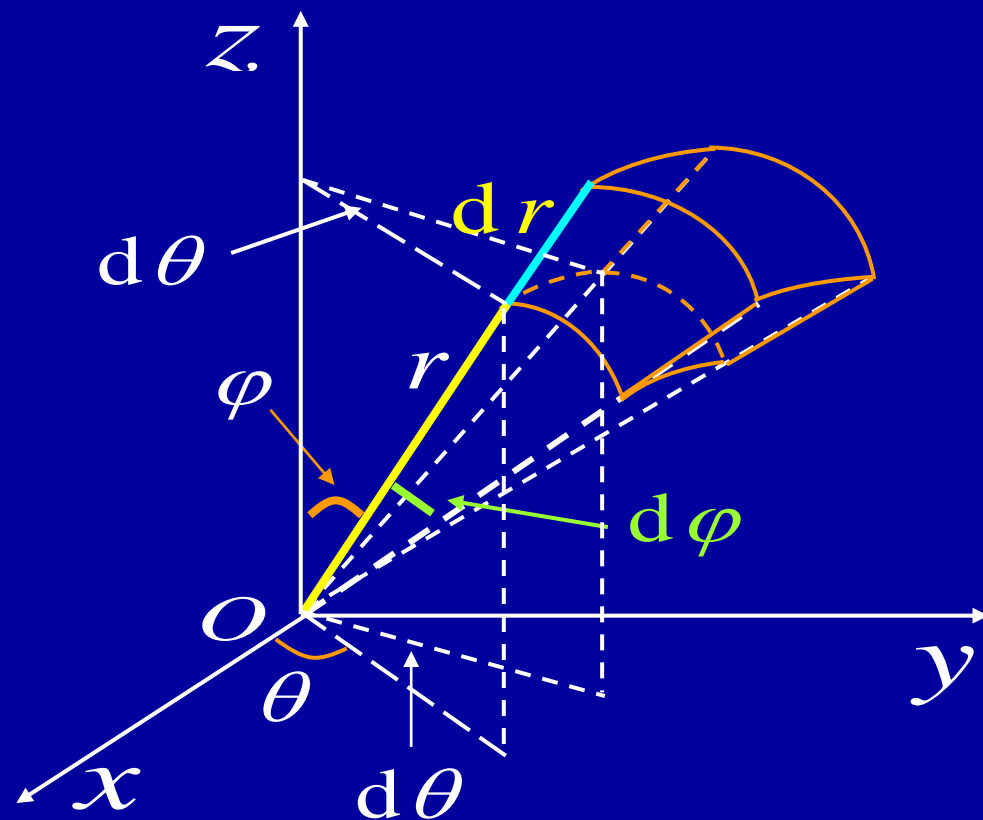
$\theta = \text{常数}$   $\longrightarrow$  半平面

$\varphi = \text{常数}$   $\longrightarrow$  锥面



在球面坐标系中体积元素为

$$dv = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$



在球面坐标系中体积元素为

$$dv = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

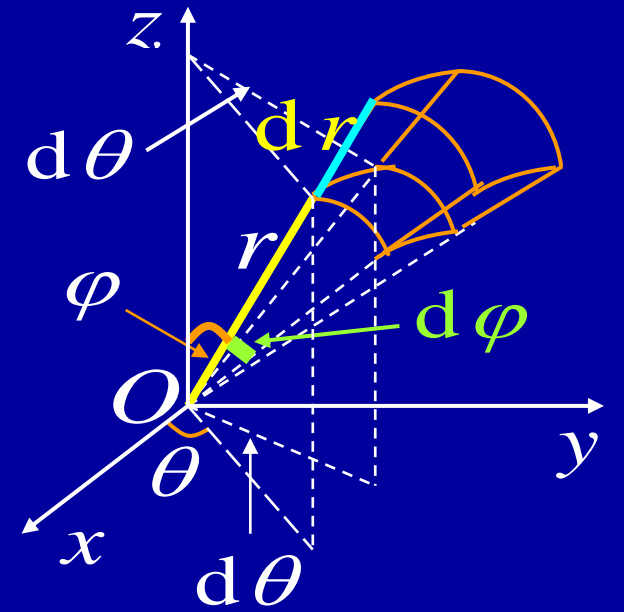
因此有

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega} F(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \end{aligned}$$

其中  $F(r, \theta, \varphi) = f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi)$

适用范围:

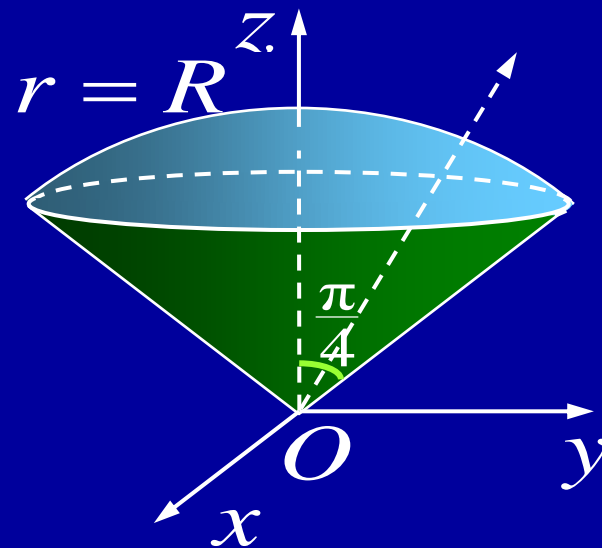
- 1) 积分域表面用球面坐标表示时方程简单;
- 2) 被积函数用球面坐标表示时变量互相分离.



**例5.** 计算三重积分  $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  为锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  与球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  所围立体.

**解:** 在球面坐标系下

$$\Omega: \begin{cases} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$



$$\therefore \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \sin \varphi d\varphi \int_0^R r^4 dr$$

$$= \frac{1}{5} \pi R^5 (2 - \sqrt{2})$$

$$dv = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$



**例6.**求曲面  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$  ( $a > 0$ ) 所围立体体积.

**解:**由曲面方程可知, 立体位于 $xOy$ 面上部, 且关于 $xOz$

$yOz$ 面对称, 并与 $xOy$ 面相切, 故在球坐标系下所围立体为

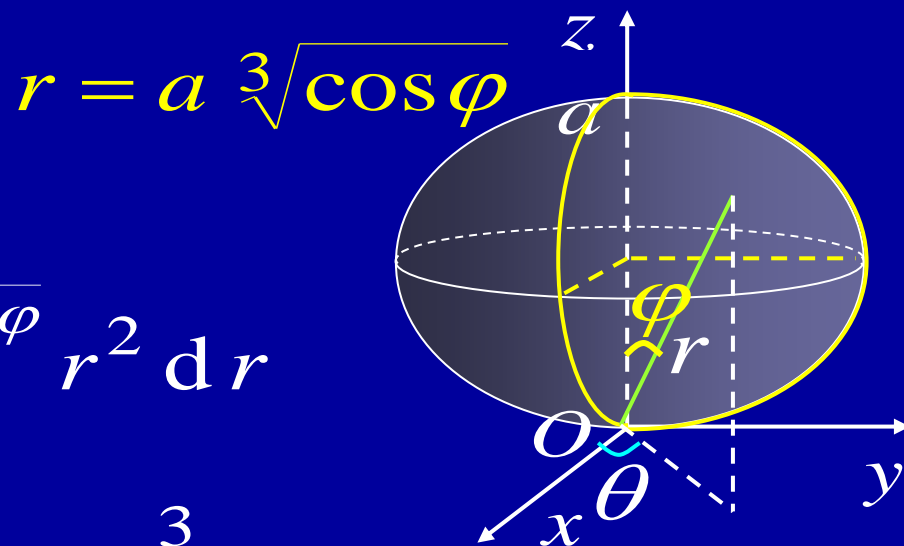
$$\Omega: 0 \leq r \leq a \sqrt[3]{\cos \varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

利用对称性, 所求立体体积为

$$V = \iiint_{\Omega} dv$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_0^{a \sqrt[3]{\cos \varphi}} r^2 dr$$

$$= \frac{2}{3} \pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{3} \pi a^3$$



$$dv = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$



## 10.3 作业

P166-167

1(2); 4; 7; 9 (2);

\*10 (1); 11 (1),



## 内容小结

坐标系	体积元素	适用情况
直角坐标系	$dx dy dz$	积分区域多由坐标面围成; 被积函数形式简洁, 或变量可分离.
柱面坐标系	$\rho d\rho d\theta dz$	
球面坐标系	$r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$	

### \* 说明:

三重积分也有类似二重积分的换元积分公式:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega^*} F(u, v, w) |J| du dv dw$$

对应雅可比行列式为  $J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$



## 思考与练习

1. 将  $I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) \mathrm{d}v$  用三次积分表示, 其中  $\Omega$  由六个平面  $x=0, x=2, y=1, x+2y=4, z=x, z=2$  所围成,  $f(x, y, z) \in C(\Omega)$ .

提示: 
$$\Omega: \begin{cases} x \leq z \leq 2 \\ 1 \leq y \leq 2 - \frac{1}{2}x \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$I = \int_0^2 \mathrm{d}x \int_1^{2-\frac{1}{2}x} \mathrm{d}y \int_x^2 f(x, y, z) \mathrm{d}z$$





2. 设  $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ , 计算

$$\iiint_{\Omega} \frac{z \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dv$$

提示: 利用对称性

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} dx dy \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{z \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dz \\ &= 0 \end{aligned}$$

奇函数



3. 设 $\Omega$ 由锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  和球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  所围成, 计算  $I = \iiint_{\Omega} (x + y + z)^2 \mathrm{d}v$ .

提示:

$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2 + \underline{2xy + 2yz + 2xz}) \mathrm{d}v$$

利用对称性

$$= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \mathrm{d}v$$

用球坐标

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^2 r^4 \mathrm{d}r = \frac{64}{5} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \pi$$

