第四节 重积分的应用

一、立体体积

二、曲面的面积

三、物体的质心

四、物体的转动惯量

五、物体的引力

1. 能用重积分解决的实际问题的特点:

所求量是 $\begin{cases}\text{分布在有界闭域上的整体量} \\ \text{对区域具有可加性}\end{cases}$

2. 用重积分解决问题的方法:

—— 用微元分析法 (元素法)建立积分式

3. 解题要点:

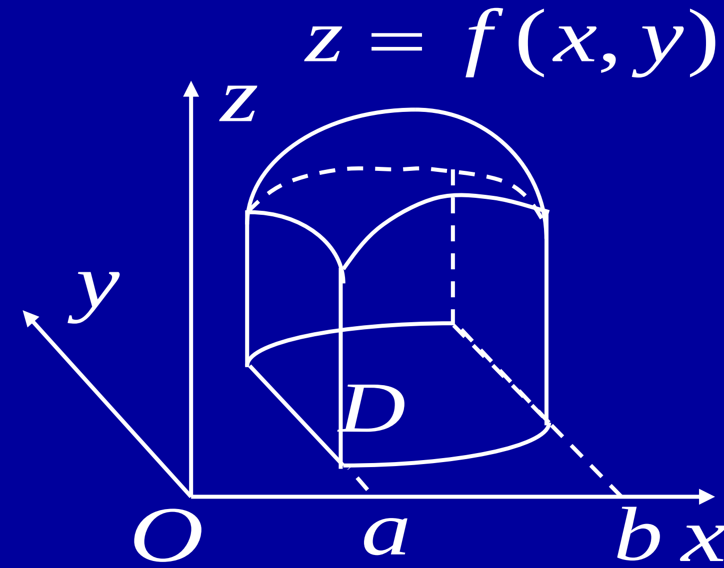
画出积分域、选择坐标系、确定积分序、

定出积分限、计算要简便

一、立体体积

- **曲顶柱体**的顶为连续曲面 $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, 则其体积为

$$V = \iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



- 占有**空间有界域 Ω** 的立体的体积为

$$V = \iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

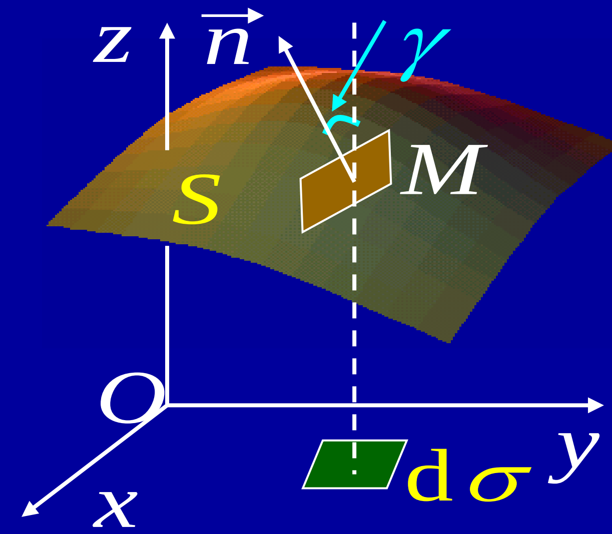
二、曲面的面积

➢设光滑曲面 $S: z = f(x, y)\,,\,(x, y)\in D$

则面积 A 可看成曲面上各点 $M(x, y, z)$

处小切平面的面积 $\mathrm{d}A$ 无限积累而成.

设它在 D 上的投影为 $\mathrm{d}\sigma$, 则

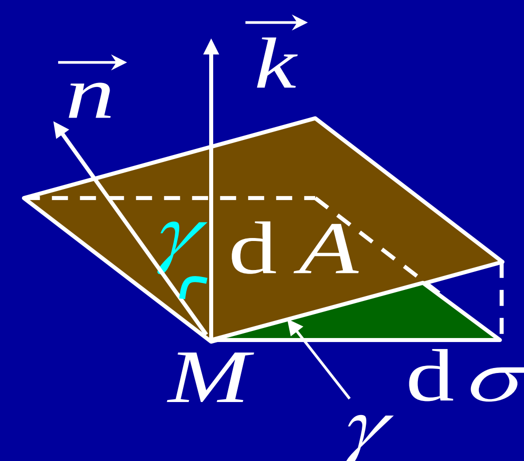


$$\mathrm{d}\sigma = \cos\gamma \cdot \mathrm{d}A$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^{\,2}(x, y) + f_y^{\,2}(x, y)}}$$

$$\mathrm{d}A = \sqrt{1 + f_x^{\,2}(x, y) + f_y^{\,2}(x, y)}\;\mathrm{d}\sigma$$

(称为面积元素)



故有曲面面积公式

$$A=\iint_D \sqrt{1+f_x^{2}(x,y)+f_y^{2}(x,y)}\,\mathrm{d}\sigma$$

即

$$\boxed{A=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

➢若光滑曲面方程为 $x=g(y,z)$, $(y,z)\in D_{yz}$, 则有

$$A=\iint_{D_{yz}} \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

➢若光滑曲面方程为 $y=h(z,x)$, $(z,x)\in D_{zx}$,则有

$$A=\iint_{D_{zx}}\sqrt{1+(\frac{\partial y}{\partial z})^2+(\frac{\partial y}{\partial x})^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

➢若光滑曲面方程为隐式 $F(x,y,z)=0$, 且 $F_z\neq 0$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z},\qquad (x,y)\in D_{xy}$$

$$\therefore\quad A=\iint_{D_{xy}}\frac{\sqrt{F_x{}^2+F_y{}^2+F_z{}^2}}{|F_z|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

例1. 计算半径为 a 的球的表面积.

解: 利用球坐标方程.

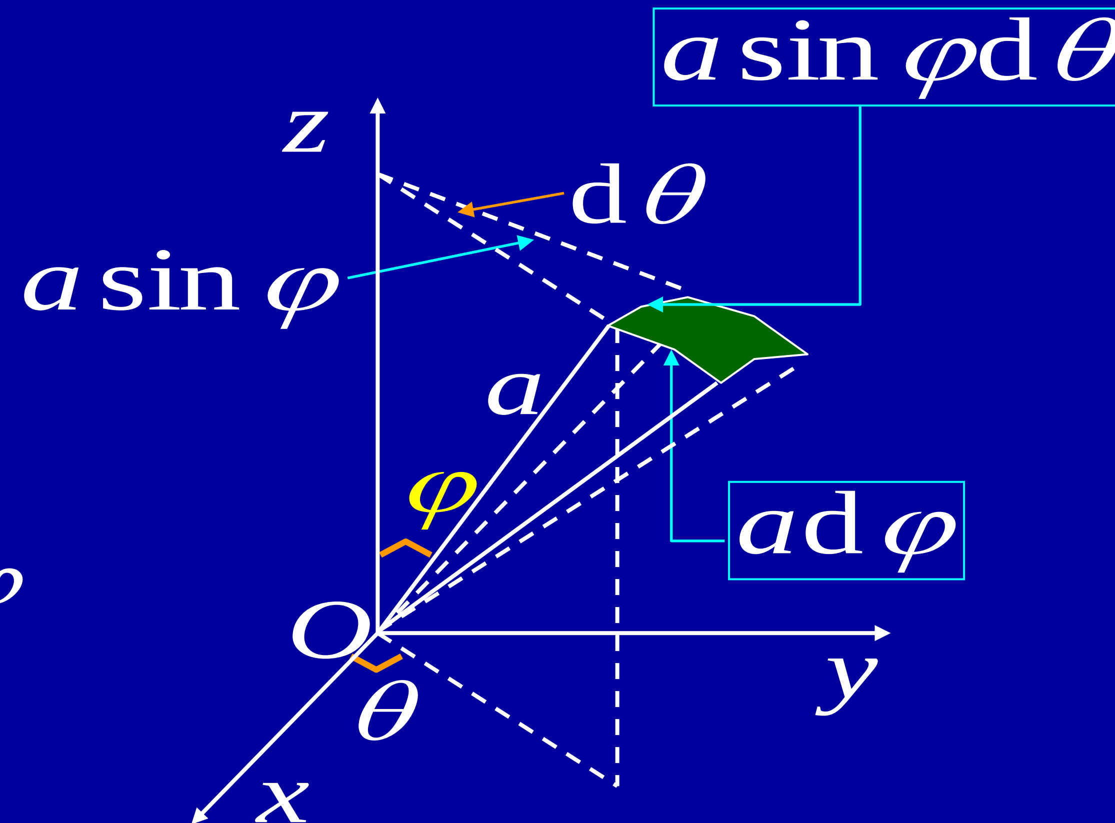
设球面方程为 $r = a$

球面面积元素为

$$\mathrm{d}A = a^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\theta$$

$$\therefore \quad A = a^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi$$

$$= 4\pi a^2$$



方法2 利用直角坐标方程. (P170)

三、物体的质心

设空间有n个质点，分别位于 (x_k, y_k, z_k)，其质量分别为 $m_k\ (k=1,2,\cdots,n)$，则该质点系的质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k},\quad \bar{y}=\frac{\sum_{k=1}^{n} y_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k},\quad \bar{z}=\frac{\sum_{k=1}^{n} z_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}$$

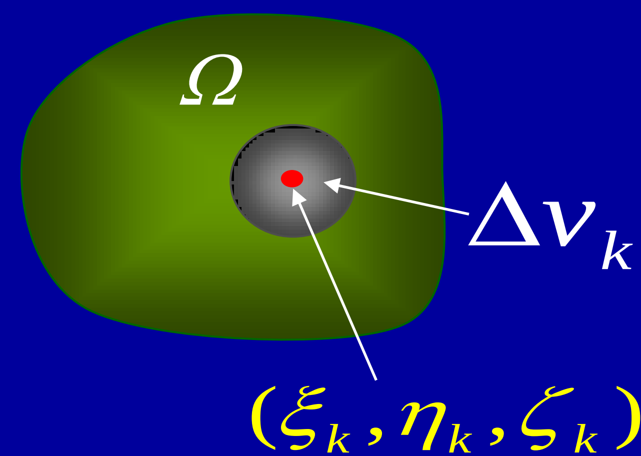
设物体占有空间域 Ω，有连续密度函数 $\rho(x,y,z)$，则采用

"大化小，常代变，近似和，取极限"

可导出其质心公式，即：

将 Ω 分成 n 小块，在第 k 块上任取一点 (ξ_k, η_k, ζ_k)，将第 k 块看作质量集中于点 (ξ_k, η_k, ζ_k) 的质点，此质点系的质心坐标就近似该物体的质心坐标. 例如,

$$\bar{x} \approx \frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k \rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta v_k}{\sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta v_k}$$



令各小区域的最大直径 $\lambda \to 0$，即得

$$\bar{x} = \frac{\iiint_{\Omega} x\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

同理可得 $\bar{y}=\dfrac{\iiint_{\Omega} y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_{\Omega}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$

$$\bar{z}=\frac{\iiint_{\Omega} z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_{\Omega}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

当 $\rho(x,y,z)\equiv$ 常数时，则得形心坐标:

$$\bar{x}=\frac{\iiint_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V},\quad \bar{y}=\frac{\iiint_{\Omega} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V},$$

$$\bar{z}=\frac{\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V}\qquad \left(V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \text{ 为 } \Omega \text{ 的体积}\right)$$

若物体为占有xOy面上区域D的平面薄片，其面密度为$\mu(x,y)$,则它的质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{\iint_D x\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{M_y}{M}$$

$$\bar{y}=\frac{\iint_D y\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{M_x}{M}$$

M_x — 对 x 轴的静矩

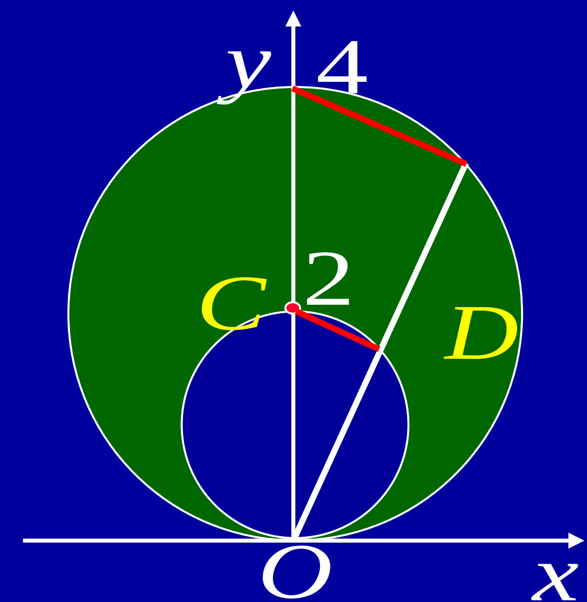
M_y — 对 y 轴的静矩

$\mu=$常数时, 得D的形心坐标:

$$\bar{x}=\frac{\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{A},\quad \bar{y}=\frac{\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{A}$$

(A为D的面积)

例3. 求位于两圆 $\rho = 2\sin\theta$ 和 $\rho = 4\sin\theta$ 之间均匀薄片的质心.



解: 利用对称性可知 $\overline{x} = 0$

而 $\overline{y} = \dfrac{1}{A}\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$= \frac{1}{3\pi}\iint_D \rho^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{3\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}\rho^2\,\mathrm{d}\rho = \frac{56}{9\pi}\int_0^{\pi}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{56}{9\pi}\cdot 2\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{56}{9\pi}\cdot 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{7}{3}$$

四、物体的转动惯量

因质点系的转动惯量等于各质点的转动惯量之和，故连续体的转动惯量可用积分计算.

设物体占有空间区域 Ω, 有连续分布的密度函数 $\rho(x, y, z)$.

该物体位于(x, y, z) 处的微元 对 z 轴的转动惯量为

$$\mathrm{d}\,I_z = (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}\,v$$

因此物体 对 z 轴 的转动惯量:

$$I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

类似可得:

对 x 轴的转动惯量

$$I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2)\ \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

对 y 轴的转动惯量

$$I_y = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2)\ \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

对原点的转动惯量

$$I_O = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)\,\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

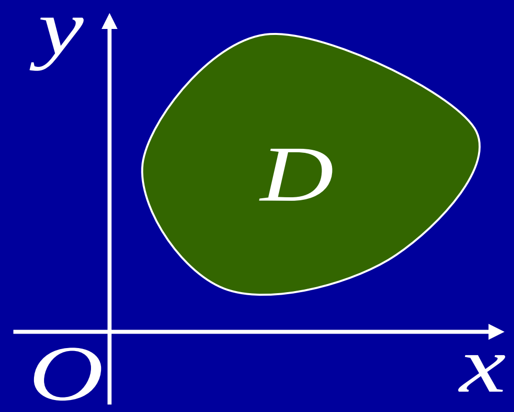
如果物体是平面薄片，面密度为 $\mu(x,y),(x,y)\in D$

则转动惯量的表达式是二重积分.

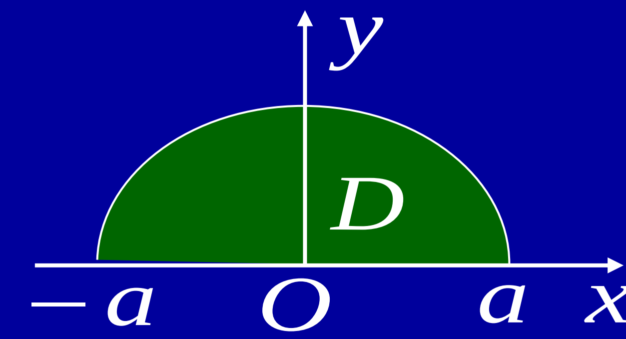
$$I_x=\iint_D y^2\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_y=\iint_D x^2\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_O=\iint_D (x^2+y^2)\,\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



例5. 求半径为 a 的均匀半圆薄片对其直径边的转动惯量.



解: 建立坐标系如图, $D:\begin{cases} x^2+y^2\le a^2 \\ y\ge 0 \end{cases}$

$$\therefore I_x=\iint_D \mu y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\mu\iint_D r^3\sin^2\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\mu\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^a r^3\,\mathrm{d}r=\frac{1}{4}\mu a^4\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

半圆薄片的质量 $M=\frac{1}{2}\pi a^2\mu$

$$=\frac{1}{4}Ma^2$$

五、物体的引力

设物体占有空间区域 Ω, 其密度函数 $\rho(x, y, z)$ 连续,

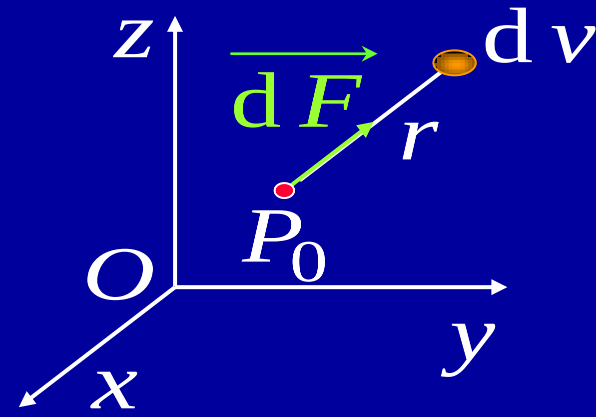
物体对位于点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的单位质量质点的引力为

$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$, 引力元素在三坐标轴上分量为

$$\mathrm{d}F_x = G\frac{\rho(x,y,z)(x-x_0)}{r^3}\,\mathrm{d}v$$

$$\mathrm{d}F_y = G\frac{\rho(x,y,z)(y-y_0)}{r^3}\,\mathrm{d}v$$

$$\mathrm{d}F_z = G\frac{\rho(x,y,z)(z-z_0)}{r^3}\,\mathrm{d}v$$



其中 $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$, G 为引力常数

因此引力分量为

$$F_x = G\iiint_{\Omega} \frac{\rho(x,y,z)(x-x_0)}{r^3}\,\mathrm{d}v$$

$$F_y = G\iiint_{\Omega} \frac{\rho(x,y,z)(y-y_0)}{r^3}\,\mathrm{d}v$$

$$F_z = G\iiint_{\Omega} \frac{\rho(x,y,z)(z-z_0)}{r^3}\,\mathrm{d}v$$

其中: $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$

若求 xOy 面上的平面薄片D, 对点P_0处的单位质量质点的引力分量, 则上式改为D上的二重积分, 密度函数改为 $\mu(x,y)$ 即可. 例如, $F_z = G\iint_{D} \frac{\mu(x,y)(0-z_0)}{r^3}\,\mathrm{d}\sigma$

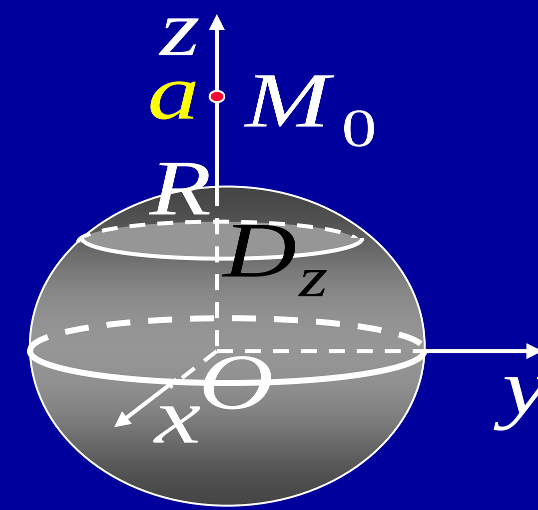
例7. 求半径为R的均匀球 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 对位于点 $M_0(0,0,a)$ $(a>R)$的单位质量质点的引力.

解: 利用对称性知引力分量 $F_x=F_y=0$

$$F_z=\iiint_{\Omega} G\rho\frac{z-a}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}}\,\mathrm{d}v$$

$$=G\rho\int_{-R}^{R}(z-a)\mathrm{d}z\iint_{D_z}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}}$$

$$=G\rho\int_{-R}^{R}(z-a)\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\frac{r\mathrm{d}r}{[r^2+(z-a)^2]^{3/2}}$$



$$F_z = \cdots = G\rho \int_{-R}^{R} (z-a)\mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{r\,\mathrm{d}r}{[r^2+(z-a)^2]^{3/2}}$$

$$= 2\pi G\rho \int_{-R}^{R} (z-a)\left(\frac{1}{a-z} - \frac{1}{\sqrt{R^2-2az+a^2}}\right)\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi G\rho\left(-2R + \frac{1}{a}\int_{-R}^{R}(z-a)\ \mathrm{d}\sqrt{R^2-2az+a^2}\right)$$

$$= -G\frac{M}{a^2}$$

$$\boxed{M = \frac{4\pi R^3}{3}\rho \text{ 为球的质量}}$$

10.4 作业

P177-178

1， 3， 6， 11

备用题

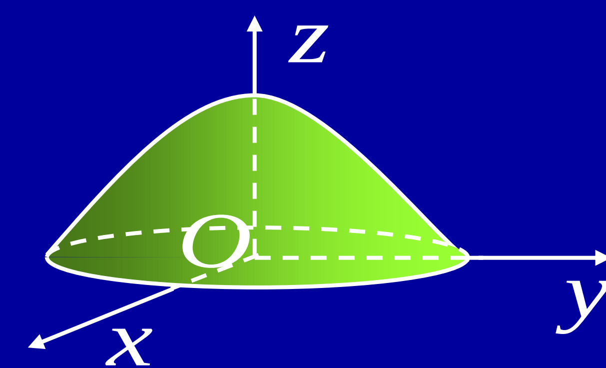
设有一高度为 $h(t)$ (t 为时间) 的雪堆在融化过程中,

其侧面满足方程 $z = h(t) - \dfrac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$, 设长度单位为厘米,

时间单位为小时, 已知体积减少的速率与侧面积成正比

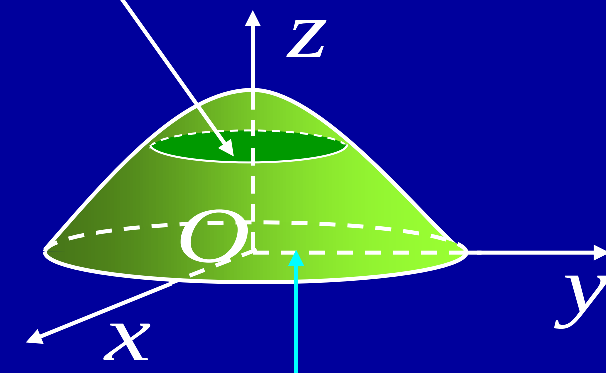
(比例系数 0.9), 问高度为 130 cm 的雪堆全部融化需要

多少小时? (2001考研)



提示:

$$D_z: x^2 + y^2 \le [\tfrac{1}{2}h^2(t) - h(t)z]$$



$$D_0: x^2 + y^2 \le \tfrac{1}{2}h^2(t)$$

记雪堆体积为 V, 侧面积为 S ,则

$$V = \int_0^{h(t)} \mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{h(t)} \tfrac{1}{2}\pi [h^2(t) - h(t)z]\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{4}h^3(t)$$

$$S = \iint_{D_0} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_0} \sqrt{1 + \frac{16(x^2+y^2)}{h^2(t)}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$ (用极坐标)

$$= \frac{2\pi}{h(t)} \int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} \sqrt{h^2(t) + 16r^2}\, r\,\mathrm{d}r = \frac{13\pi}{12}h^2(t)$$

$$\boxed{V=\frac{\pi}{4}h^3(t)\,,\qquad S=\frac{13\pi}{12}h^2(t)}$$

由题意知 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-0.9S$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{13}{10} \\ h(0)=130 \end{cases} \Longrightarrow h(t)=-\frac{13}{10}t+130$$

令 $h(t)\to 0$, 得 $t=100\ (\mathrm{h})$

因此高度为130厘米的雪堆全部融化所需的时间为 100小时.

例3. 计算双曲抛物面 $z = xy$ 被柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 所截出的面积 A.

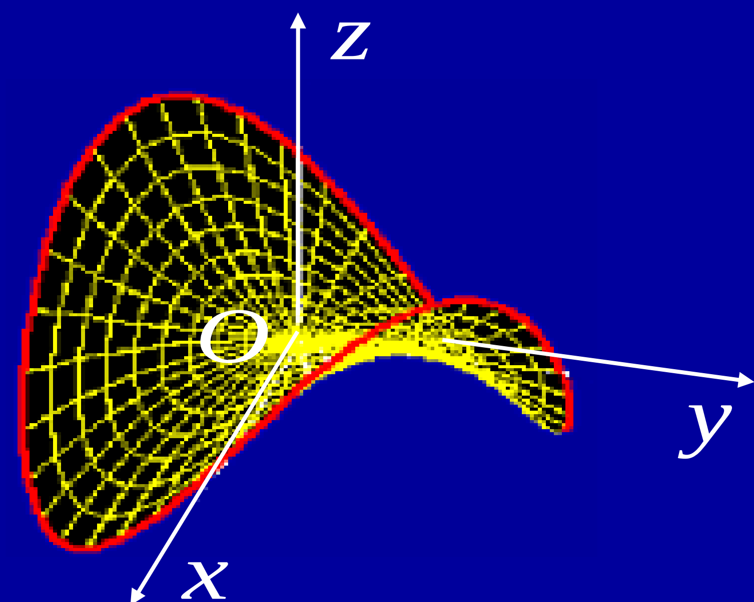
解: 曲面在 xOy 面上投影为 $D: x^2 + y^2 \le R^2$, 则

$$A = \iint_D \sqrt{1 + z_x{}^2 + z_y{}^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

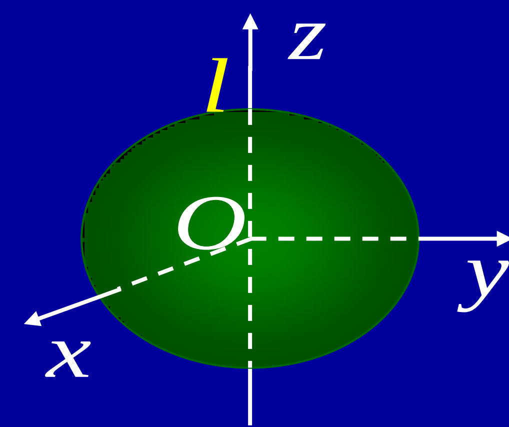
$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \sqrt{1 + r^2}\, r\, \mathrm{d}r$$

$$= \frac{2}{3}\pi\left[(1 + R^2)^{3/2} - 1\right]$$



例6. 求密度为ρ的均匀球体对于过球心的一条轴 l 的转动惯量.

解: 取球心为原点, z 轴为 l 轴, 设球所占域为



$$\Omega: x^2+y^2+z^2 \le a^2,\text{则}$$

$$I_z = \iiint_\Omega (x^2+y^2)\rho\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad (\text{用球坐标})$$

$$= \rho\iiint_\Omega (r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta)$$

$$\cdot\, r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2}{5}\pi\rho a^5\cdot 2\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2}{5}a^2 M$$

球体的质量

$$M = \frac{4}{3}\pi a^3\rho$$