

## 第五节

# 函数的微分

- 一、微分的概念
- 二、微分运算法则
- 三、微分在近似计算中的应用



# 一、微分的概念

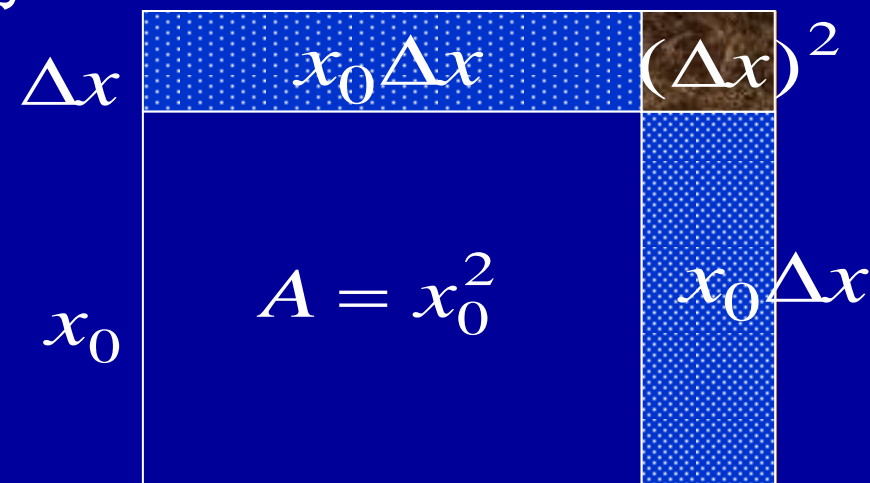
引例：一块正方形金属薄片受温度变化的影响，其边长由  $x_0$  变到  $x_0 + \Delta x$ ，问此薄片面积改变了多少？

设薄片边长为  $x$ ，面积为  $A$ ，则  $A = x^2$ ，

当  $x$  在  $x_0$  取得增量  $\Delta x$  时，面积的增量为

$$\begin{aligned}\Delta A &= (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 \\ &= \underbrace{2x_0\Delta x}_{\text{关于}\Delta x\text{的线性主部}} + \underbrace{(\Delta x)^2}_{\text{高阶无穷小}}\end{aligned}$$

关于  $\Delta x$  的线性主部  $\Delta x \rightarrow 0$  时为高阶无穷小



故  $\Delta A \approx \underline{2x_0\Delta x}$

称为函数在  $x_0$  的微分



**定义:** 若函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  的增量可表示为

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$$

( $A$  为不依赖于  $\Delta x$  的常数)

则称函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  **可微**, 而  $A\Delta x$  称为  $f(x)$  在点  $x_0$  的**微分**, 记作  $dy$  或  $df$ , 即

$$dy = A\Delta x$$

**定理:** 函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  可微的**充要条件**是

$y = f(x)$  在点  $x_0$  处可导, 且  $A = f'(x_0)$ , 即

$$dy = f'(x_0)\Delta x$$



**定理：**函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  可微的**充要条件**是

$y = f(x)$  在点  $x_0$  处可导, 且  $A = f'(x_0)$ , 即

$$dy = f'(x_0)\Delta x$$

**证：“必要性”** 已知  $y = f(x)$  在点  $x_0$  可微, 则

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \right) = A$$

故  $y = f(x)$  在点  $x_0$  可导, 且  $f'(x_0) = A$



**定理：**函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  可微的**充要条件**是

$y = f(x)$  在点  $x_0$  处可导, 且  $A = f'(x_0)$ , 即

$$dy = f'(x_0)\Delta x$$

**“充分性”** 已知  $y = f(x)$  在点  $x_0$  可导, 则

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha \quad \left( \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0 \right)$$

$$\text{故 } \Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x = \underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{f'(x_0) \neq 0 \text{ 时}} + o(\Delta x)$$

$$\text{即 } dy = f'(x_0)\Delta x$$

此项为  $\Delta y$  的  
线性主部



说明:  $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$

$$dy = f'(x_0)\Delta x$$

当  $f'(x_0) \neq 0$  时,

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{dy} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{f'(x_0)\Delta x} \\ &= \frac{1}{f'(x_0)} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1\end{aligned}$$

所以  $\Delta x \rightarrow 0$  时  $\Delta y$  与  $dy$  是等价无穷小, 故当  $|\Delta x|$  很小时, 有近似公式

$$\Delta y \approx dy$$



微分的几何意义 —— 切线纵坐标的增量

$$dy = f'(x_0)\Delta x = \tan \alpha \cdot \Delta x$$

当  $\Delta x$  很小时,  $\Delta y \approx dy$

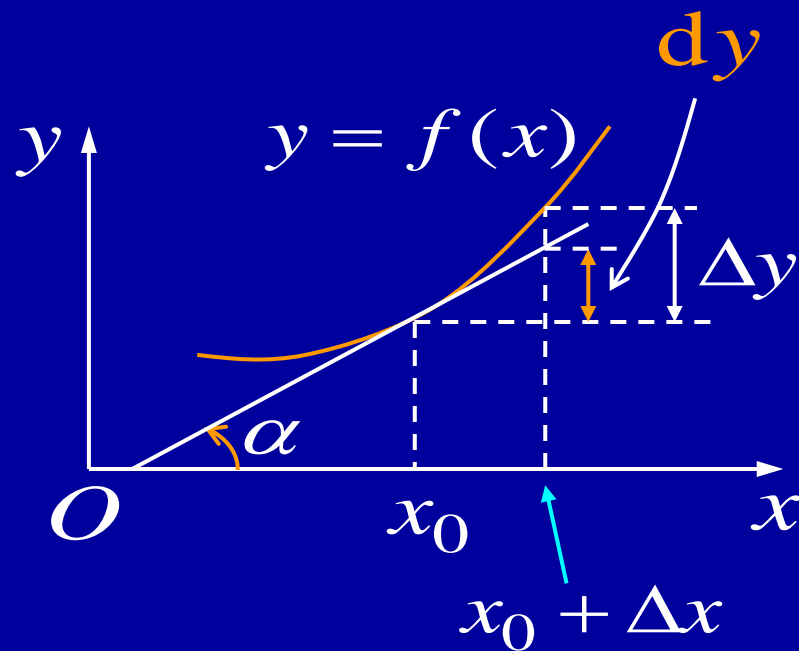
当  $y = x$  时,

$$\Delta y = \Delta x \overset{\text{记}}{=} dx$$

称  $\Delta x$  为自变量的微分, 记作  $dx$

则有  $dy = f'(x) dx$

从而  $\frac{dy}{dx} = f'(x)$



导数也叫作微商



例如,  $y = x^3$ ,

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{x=2 \\ dx=0.02}} = 3x^2 \cdot dx \bigg|_{\substack{x=2 \\ dx=0.02}} = 0.24$$

又如,  $y = \arctan x$ ,

$$dy = \frac{1}{1+x^2} dx$$

基本初等函数的微分公式 (见 P113-114表)





## 二、微分运算法则

设  $u(x)$ ,  $v(x)$  均可微, 则

$$1. d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$2. d(Cu) = Cdu \quad (C \text{ 为常数})$$

$$3. d(uv) = vdu + u dv$$

$$4. d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

5. 复合函数的微分

$y = f(u)$ ,  $u = \varphi(x)$  分别可微,

则复合函数  $y = f[\varphi(x)]$  的微分为

$$dy = y'_x dx = f'(u) \boxed{\varphi'(x) dx} \longrightarrow \boxed{du}$$

$$dy = f'(u) du$$

微分形式不变



例1.  $y = \ln(1 + e^{x^2})$ , 求  $dy$ .

解:  $dy = \frac{1}{1 + e^{x^2}} d(1 + e^{x^2})$

$$= \frac{1}{1 + e^{x^2}} \cdot e^{x^2} d(x^2)$$

$$= \frac{1}{1 + e^{x^2}} \cdot e^{x^2} \cdot 2x dx$$

$$= \frac{2xe^{x^2}}{1 + e^{x^2}} dx$$



**例2.** 设  $y \sin x - \cos(x - y) = 0$ , 求  $dy$ .

**解:** 利用一阶微分形式不变性, 有

$$\begin{aligned} d(y \sin x) - d(\cos(x - y)) &= 0 \\ \sin x \, dy + y \cos x \, dx + \sin(x - y) (dx - dy) &= 0 \\ dy &= \frac{y \cos x + \sin(x - y)}{\sin(x - y) - \sin x} dx \end{aligned}$$

**例3.** 在下列括号中填入适当的函数使等式成立:

$$(1) \quad d\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right) = xdx \quad (C \text{ 为任意常数})$$

$$(2) \quad d\left(\frac{1}{\omega} \sin \omega t + C\right) = \cos \omega t \, dt$$

**说明:** 上述微分的反问题是不定积分要研究的内容.

**注意:** 数学中的反问题往往出现多值性.



### 三、微分在近似计算中的应用

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

当  $|\Delta x|$  很小时, 得近似等式:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$



令  $x = x_0 + \Delta x$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

使用原则: 1)  $f(x_0)$ ,  $f'(x_0)$  好算;  
2)  $x$  与  $x_0$  靠近.



特别当  $x_0 = 0$ ,  $|x|$  很小时,

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x$$

常用近似公式: ( $|x|$  很小)

$$(1) (1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$$

证明: 令  $f(x) = (1+x)^\alpha$

$$\text{得 } f(0) = 1, f'(0) = \alpha$$

$$\therefore \text{当 } |x| \text{ 很小时, } (1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$$

$$(2) \sin x \approx x$$

$$(3) e^x \approx 1 + x$$

$$(4) \tan x \approx x$$

$$(5) \ln(1+x) \approx x$$



例4. 求  $\sin 29^\circ$  的近似值.

解: 设  $f(x) = \sin x$ ,

$$\text{取 } x_0 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}, \quad x = 29^\circ = \frac{29}{180}\pi$$

$$\text{则 } dx = -\frac{\pi}{180}$$

$$\sin 29^\circ = \sin \frac{29}{180}\pi \approx \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-0.0175)$$

$$\approx 0.485$$

$$\sin 29^\circ \approx 0.4848\ldots$$



例5. 计算  $\sqrt[5]{245}$  的近似值.

$$3^5 = 243$$

解:  $\sqrt[5]{245} = (243 + 2)^{\frac{1}{5}}$

$$= 3 \left(1 + \frac{2}{243}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$(1+x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x$$

$$\approx 3 \left(1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{243}\right)$$

$$\approx 3.004938$$

$$\sqrt[5]{245} = 3.004942 \dots$$



**例6.** 有一批半径为1cm 的球，为了提高球面的光洁度，  
要镀上一层铜，厚度定为 0.01cm，估计一下，每只球需用铜多少克。（铜的密度  $8.9 \text{ g/cm}^3$ ）

**解：** 已知球体体积为  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$

镀铜体积为  $V$  在  $R = 1, \Delta R = 0.01$  时体积的增量  $\Delta V$ ,

$$\begin{aligned} \Delta V &\approx dV \bigg|_{\substack{R=1 \\ \Delta R=0.01}} = 4\pi R^2 \Delta R \bigg|_{\substack{R=1 \\ \Delta R=0.01}} \\ &\approx 0.13 (\text{cm}^3) \end{aligned}$$

因此每只球需用铜约为  $8.9 \times 0.13 = 1.16 \text{ (g)}$





## 2.5 作业

P120-121

1 ; 3 (3), (6), (9) ;

4 (1), (3), (5) ; 7(1) ;



# 内容小结

## 1. 微分概念

- 微分的定义及几何意义
- 可微  $\longleftrightarrow$  可导

## 2. 微分运算法则

微分形式不变性： $\mathrm{d}f(u) = f'(u)\mathrm{d}u$   
( $u$  是自变量或中间变量)

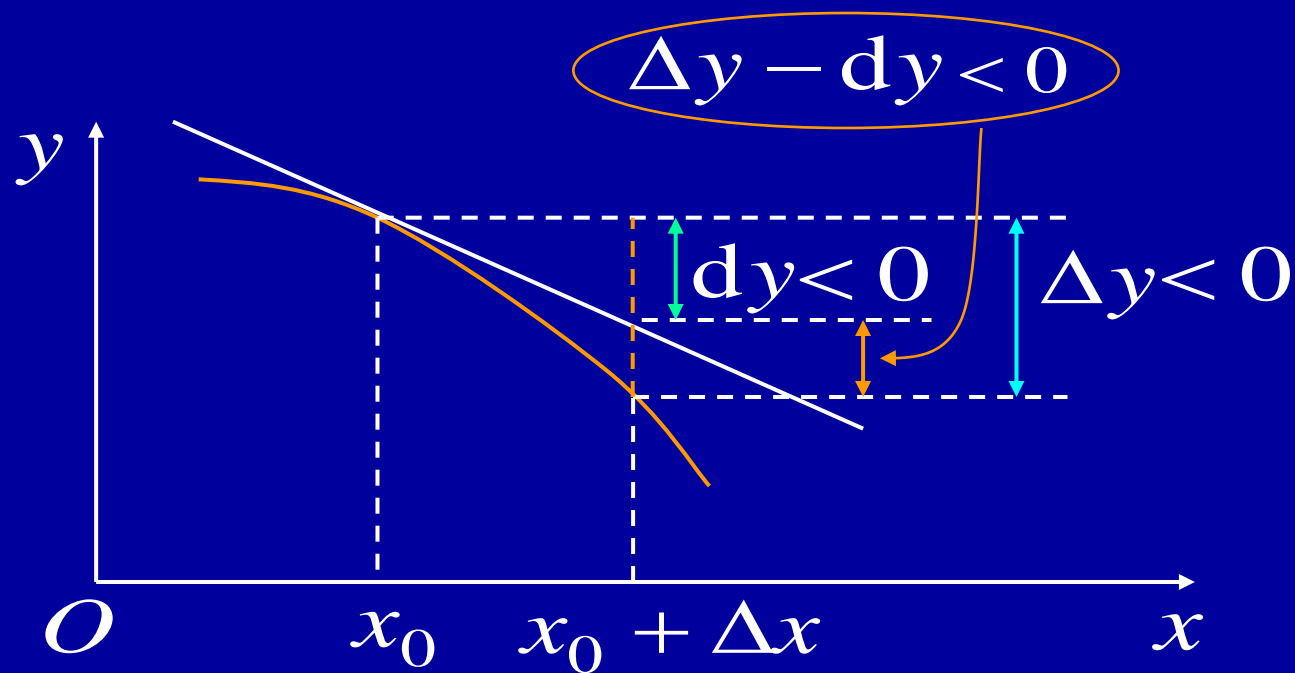
## 3. 微分的应用

- 近似计算
- 估计误差



## 思考与练习

1. 设函数  $y = f(x)$  的图形如下, 试在图中标出的点  $x_0$  处的  $dy$ ,  $\Delta y$  及  $\Delta y - dy$ , 并说明其正负.



$$2. \quad d(\arctan e^{-x}) = \frac{1}{1 + e^{-2x}} de^{-x}$$

$$= \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-2x}} dx$$

$$3. \quad \frac{d \tan x}{d \sin x} = \sec^3 x$$

$$4. \quad d \left( -\frac{1}{2} \cos 2x + C \right) = \sin 2x dx$$



5. 设  $y = y(x)$  由方程  $x^3 + y^3 - \sin 3x + 6y = 0$  确定,  
求  $\mathrm{d} y|_{x=0}$ .

**解:** 方程两边求微分, 得

$$3x^2 \mathrm{d} x + 3y^2 \mathrm{d} y - 3 \cos 3x \mathrm{d} x + 6 \mathrm{d} y = 0$$

当  $x=0$  时  $y=0$ , 由上式得  $\mathrm{d} y|_{x=0} = \frac{1}{2} \mathrm{d} x$

6. 设  $a > 0$ , 且  $|b| \ll a^n$ , 则

$$\sqrt[n]{a^n + b} \approx a + \frac{b}{n a^{n-1}}$$



## 备用题

1. 已知  $y = \arcsin(\sin^2 \frac{1}{x})$ , 求  $dy$ .

解: 因为

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin^2 \frac{1}{x})^2}} \cdot 2 \sin \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot (-\frac{1}{x^2})$$

所以

$$dy = y' dx = -\frac{\sin \frac{2}{x}}{x^2 \sqrt{1 - (\sin^2 \frac{1}{x})^2}} dx$$



2. 已知  $xy = e^{x+y}$ , 求  $dy$ .

解: 方程两边求微分, 得

$$x dy + y dx = e^{x+y} (dx + dy)$$

$$\therefore dy = \frac{y - e^{x+y}}{e^{x+y} - x} dx$$

