

第二节

洛必达法则

$$\frac{0}{0}$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

一、 $\frac{0}{0}$ 型未定式

二、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式

三、其他未定式



本节研究:

函数之商的极限 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ ($\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型)

转化

洛必达法则

导数之商的极限 $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$



一、 $\frac{0}{0}$ 型未定式

定理 1.

$$1) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} F(x) = 0$$

$$2) f(x) \text{ 与 } F(x) \text{ 在 } \overset{\circ}{U}(a) \text{ 内可导, 且 } F'(x) \neq 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)} \text{ 存在 (或为 } \infty \text{)}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)} \quad (\text{洛必达法则})$$



洛必达法则

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

推论1. 定理 1 中 $x \rightarrow a$ 换为下列过程之一:

$$x \rightarrow a^+, x \rightarrow a^-, x \rightarrow \infty, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$$

条件 2) 作相应的修改, 定理 1 仍然成立.

推论 2. 若 $\lim \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 仍属 $\frac{0}{0}$ 型, 且 $f'(x), F'(x)$ 满足定

理1条件, 则

$$\lim \frac{f(x)}{F(x)} = \lim \frac{f'(x)}{F'(x)} = \lim \frac{f''(x)}{F''(x)}$$



二、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式

定理 2.

$$1) \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow a} |F(x)| = \infty$$

2) $f(x)$ 与 $F(x)$ 在 $\dot{U}(a)$ 内可导, 且 $F'(x) \neq 0$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)} \text{ 存在 (或为 } \infty \text{)}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)} \quad (\text{洛必达法则})$$

证: 略



定理 2.1) $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow a} |F(x)| = \infty$

2) $f(x)$ 与 $F(x)$ 在 $U(a)$ 内可导, 且 $F'(x) \neq 0$

3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在 (或为 ∞)

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

说明: 定理中 $x \rightarrow a$ 换为下列之一

$x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow a^-$, $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$

条件 2) 作相应的修改, 定理仍然成立.



例1. 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

$\frac{0}{0}$ 型

解: 原式 $\stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{3x^2 - 2x - 1}$

$$\stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{6x - 2} = \frac{3}{2}$$

注意: 不是未定式不能用洛必达法则 !

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{6x - 2} \neq \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6}{6} = 1$$



例2. 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}}$.

$\frac{0}{0}$ 型

解: 原式 $\stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$

$\frac{\infty}{\infty}$ 型

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2x} = 1$

思考: 如何求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{\frac{1}{n}}$ (n 为正整数) ?



例3. 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} \quad (n > 0).$

$\frac{\infty}{\infty}$ 型

解: 原式 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{nx^n} = 0$

例4. 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{\lambda x}} \quad (n > 0, \lambda > 0).$

$\frac{\infty}{\infty}$ 型

解: (1) n 为正整数的情形.

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2 e^{\lambda x}}$$

$$\stackrel{\text{洛}}{=} \cdots \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{\lambda^n e^{\lambda x}} = 0$$



例4. 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{\lambda x}}$ ($n > 0, \lambda > 0$).

(2) n 不为正整数的情形.

存在正整数 k , 使当 $x > 1$ 时,

$$x^k < x^n < x^{k+1}$$

从而
$$\frac{x^k}{e^{\lambda x}} < \frac{x^n}{e^{\lambda x}} < \frac{x^{k+1}}{e^{\lambda x}}$$

用夹逼准则

由(1)
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{e^{\lambda x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{k+1}}{e^{\lambda x}} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{\lambda x}} = 0$$



说明:

1) 例3, 例4 表明 $x \rightarrow +\infty$ 时,

$$\ln x, \quad x^n \ (n > 0), \quad e^{\lambda x} \ (\lambda > 0)$$

后者比前者趋于 $+\infty$ 更快.

2) 在满足定理条件的某些情况下洛必达法则不能解决计算问题.

例如,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \overset{\text{用洛必达法则}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$$\text{事实上 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} = 1$$



3) 若 $\lim \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 不存在 ($\neq \infty$) 时, 不能用洛必达法则!

即
$$\lim \frac{f(x)}{F(x)} \neq \lim \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

例如,
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x} \neq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \cos x}{1}$$

||

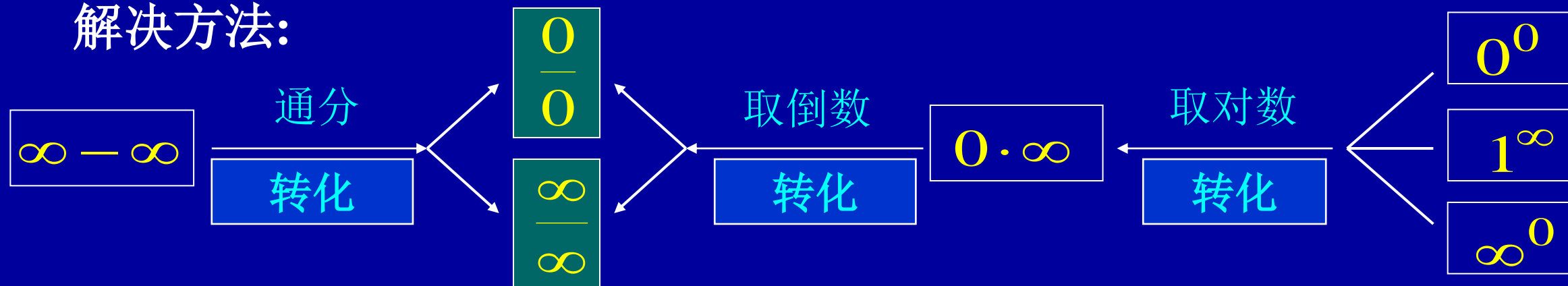
极限不存在

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1$$



三、其他未定式: $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型

解决方法:



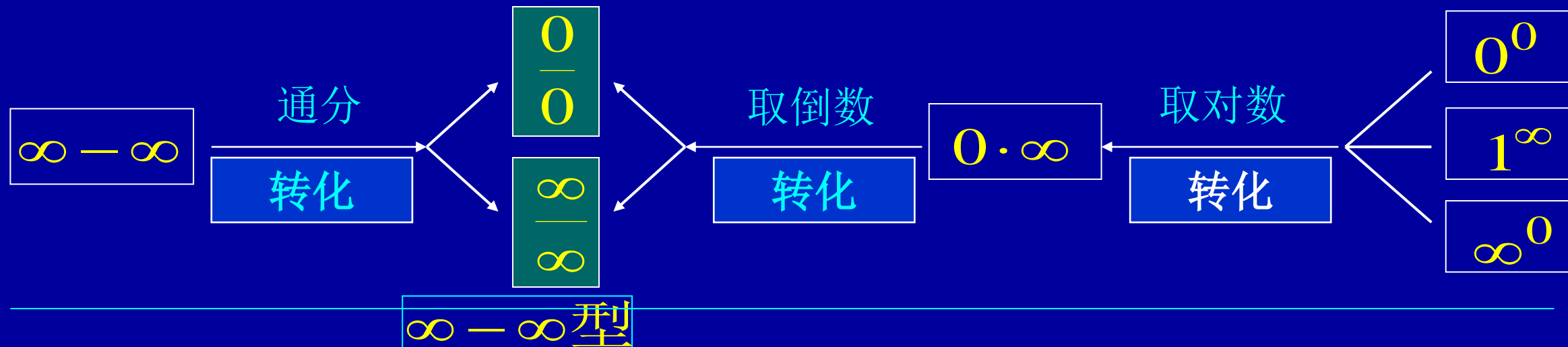
例5. 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x \ (n > 0)$.

$0 \cdot \infty$ 型

解: 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-n}} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-n x^{-n-1}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x^n}{n} \right) = 0$$





例6. 求 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$.

解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x}$$

$$= 0$$

例7. 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$. 0^0 型

解: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x}$

利用 例5

$$= e^0 = 1$$



例8. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \sin x}$.

$\frac{0}{0}$ 型

解: 注意到 $\sin x \sim x$

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{3x^2}$$

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

$$= \frac{1}{3}$$



3.2 作业

P137

1 (3), (6), (9), (12),

2



内容小结

洛必达法则

$\infty - \infty$ 型

$$f - g = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{g} \cdot \frac{1}{f}}$$

$\frac{0}{0}$ 型
$\frac{\infty}{\infty}$ 型

$0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型

$$f^g = e^{g \ln f}$$

$0 \cdot \infty$ 型

$$f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$$



思考与练习

1. 设 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 是未定式极限, 如果 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 极限不存在,

是否 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的极限也不存在? 举例说明.

说明3)

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1 + x)} = \underline{\frac{3}{2}}$$

$x \rightarrow 0$ 时,
 $\ln(1 + x) \sim x$
 $1 + \cos x \rightarrow 2$

分析: 原式 $= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{x} = \frac{1}{2} (3 + 0)$



$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \cot x \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

分析: 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x (x - \sin x)}{x \sin^2 x}$

$$\sin x \sim x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

$$\stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} x^2}{3x^2} = \frac{1}{6}$$



4. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$

解: 令 $t = \frac{1}{x}$, 则

原式 $= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2t} - 2\sqrt{1+t} + 1}{t^2}$

$\stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+2t)^{-\frac{1}{2}} - (1+t)^{-\frac{1}{2}}}{2t}$

$\stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-(1+2t)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}(1+t)^{-\frac{3}{2}}}{2} = -\frac{1}{4}$



备用题 求下列极限：

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} [x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}) - x];$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{100}} e^{-\frac{1}{x^2}};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x + x^2) + \ln(1 - x + x^2)}{\sec x - \cos x}.$$

解: 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} [x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}) - x]$ (令 $t = \frac{1}{x}$)

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{t^2} \ln(1 + t) - \frac{1}{t} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + t) - t}{t^2}$$

洛

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+t} - 1}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t}{2t(1+t)} = -\frac{1}{2}$$



$$2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{100}} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

解: 令 $t = \frac{1}{x^2}$, 则

$$\text{原式} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{50} e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{50}}{e^t} \quad (\text{用洛必达法则})$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{50t^{49}}{e^t} \quad (\text{继续用洛必达法则})$$

$$= \cdots = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{50!}{e^t} = 0$$



$$3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) + \ln(1-x+x^2)}{\sec x - \cos x}$$

解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[(1+x^2)^2 - x^2]}{\sec x - \cos x}$

$$u \rightarrow 0 \text{ 时} \\ \ln(1+u) \sim u$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2+x^4)}{\sec x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^4}{\sec x - \cos x}$$

洛 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 4x^3}{\sec x \tan x - (-\sin x)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{\sin x} \cdot \frac{2+4x^2}{\sec^2 x + 1} \right] = 1$$



例9. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt[n]{n} - 1)$.

$\infty \cdot 0$ 型

法1. 直接用洛必达法则.

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{x}} - 1}{x^{-\frac{1}{2}}}$$

下一步计算很繁！

法2. 利用例3结果.

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2}} (n^{\frac{1}{n}} - 1)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n} \ln n} - 1}{n^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \ln n}{n^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}} \stackrel{\text{例3}}{=} 0$$

$$n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln n} \stackrel{\text{例3}}{\rightarrow} 1$$

$$e^u - 1 \sim u$$

