

# 第三节 泰勒公式

目的 ---- 用多项式近似表示函数应用  $\left\{ \begin{array}{l} \text{理论分析} \\ \text{近似计算} \end{array} \right.$

一、泰勒公式的建立

二、几个初等函数的麦克劳林公式

三、泰勒公式的应用



# 一、泰勒公式的建立

在微分应用中已知近似公式：

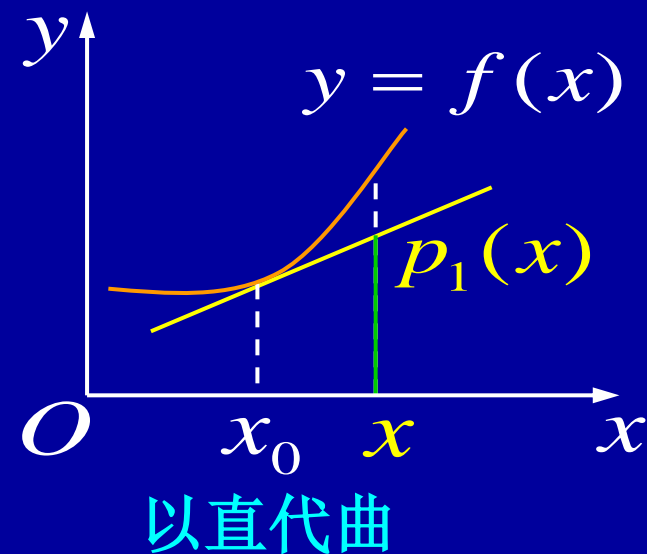
$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{p_1(x)}$$

$x$  的一次多项式

特点:  $p_1(x_0) = f(x_0)$

$$p_1'(x_0) = f'(x_0)$$

需要解决的问题  $\left\{ \begin{array}{l} \text{如何提高精度?} \\ \text{如何估计误差?} \end{array} \right.$



1. 求  $n$  次近似多项式  $p_n(x)$ , 要求:

$$p_n(x_0) = f(x_0), p'_n(x_0) = f'(x_0), \cdots, p_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

令  $p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$

则  $p'_n(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1}$

$$p''_n(x) = 2!a_2 + \cdots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}$$

.....

$$p_n^{(n)}(x) = n!a_n$$

$$a_0 = p_n(x_0) = f(x_0), \quad a_1 = p'_n(x_0) = f'(x_0),$$

$$a_2 = \frac{1}{2!} p''_n(x_0) = \frac{1}{2!} f''(x_0), \cdots, a_n = \frac{1}{n!} p_n^{(n)}(x_0) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

$$\text{故 } p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$



## 2. 余项估计

令  $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$  (称为余项), 则有

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} \\ &= \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1} - 0} = \frac{R'_n(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n} \quad (\xi_1 \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}) \\ &= \frac{R'_n(\xi_1) - R'_n(x_0)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n - 0} = \frac{R''_n(\xi_2)}{(n+1)n(\xi_2 - x_0)^{n-1}} \quad (\xi_2 \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } \xi_1 \text{ 之间}) \\ &= \cdots \\ &= \frac{R_n^{(n)}(\xi_n) - R_n^{(n)}(x_0)}{(n+1) \cdots 2(\xi_n - x_0) - 0} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}) \end{aligned}$$



$$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

$$\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

$$\downarrow \because p_n^{(n+1)}(x) = 0, \therefore R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

当在  $x_0$  的某邻域内  $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$  时

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}$$

$$\therefore R_n(x) = o((x - x_0)^n) \quad (x \rightarrow x_0)$$



## 泰勒(Taylor)中值定理：



若  $f(x)$  在包含  $x_0$  的某开区间  $(a, b)$  内具有直到  $n+1$  阶的导数，则当  $x \in (a, b)$  时，有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) \quad (1)$$

$$\text{其中 } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}) \quad (2)$$

公式 ① 称为  $f(x)$  的  $n$  阶泰勒公式。

公式 ② 称为  $n$  阶泰勒公式的拉格朗日余项。



注意到  $R_n(x) = o[(x - x_0)^n]$  ③

在不需要余项的精确表达式时，泰勒公式可写为

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o[(x - x_0)^n] \quad \text{④}$$

公式 ③ 称为  $n$  阶泰勒公式的佩亚诺(Peano) 余项.

\* 可以证明:

$f(x)$  在点  $x_0$  有直到  $n$  阶的导数

$\implies$  ④ 式成立



$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

特例:

(1) 当  $n=0$  时, 泰勒公式变为

给出拉格朗日中值定理

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

(2) 当  $n=1$  时, 泰勒公式变为

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2$$

可见  $f(x) \approx f(x_0) + \underline{f'(x_0)(x - x_0)}$  ( $\xi$  在  $x_0$  与  $x$  之间)

误差  $R_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2$  ( $\xi$  在  $x_0$  与  $x$  之间)

$\boxed{df}$





在泰勒公式中若取  $x_0 = 0$ , 记  $\xi = \theta x$  ( $0 < \theta < 1$ ), 则有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$



称为**麦克劳林 (Maclaurin) 公式**.

由此得近似公式

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

若在公式成立的区间上  $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ , 则有误差估计式

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1}$$



## 二、几个初等函数的麦克劳林公式

(1)  $f(x) = e^x$

$$\because f^{(k)}(x) = e^x, \quad f^{(k)}(0) = 1 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$\therefore e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

其中  $R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$

麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$



$$(2) \quad f(x) = \sin x$$

$$\therefore f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(k)}(0) = \sin k \frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0, & k = 2m \\ (-1)^{m-1}, & k = 2m-1 \end{cases} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

$$\therefore \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m}(x)$$

$$\text{其中} \quad R_{2m}(x) = \frac{(-1)^m \cos(\theta x)}{(2m+1)!} x^{2m+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

麦克劳林公式

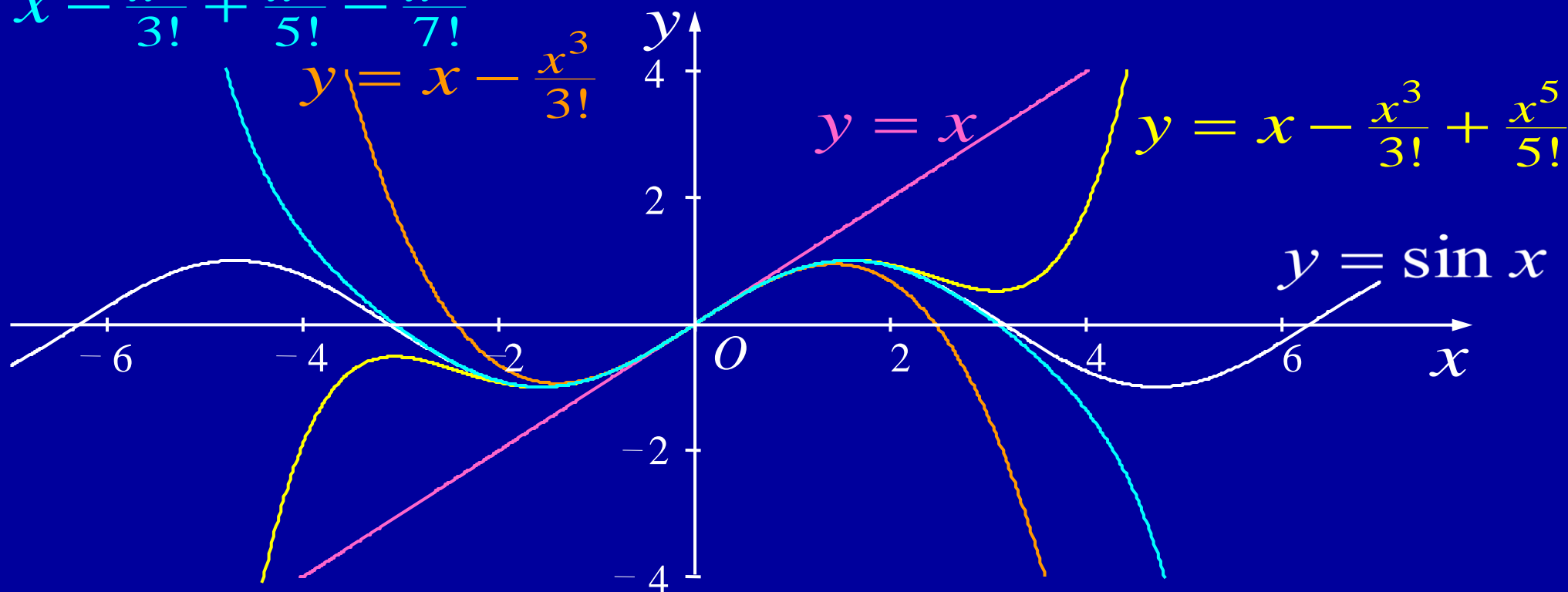
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$



## 泰勒多项式逼近 $\sin x$

$$\sin x = \underline{x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}} + o(x^{2n})$$

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$
$$y = x - \frac{x^3}{3!}$$

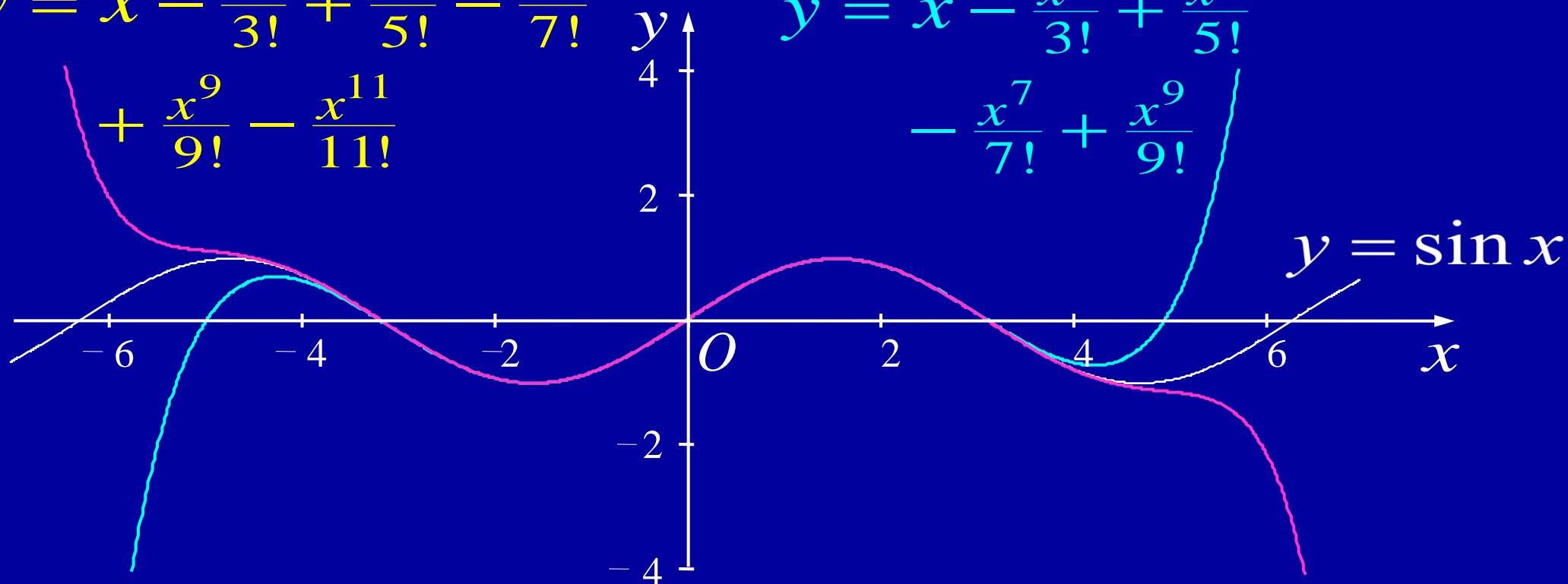


## 泰勒多项式逼近 $\sin x$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + o(x^{2n})$$

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}$$

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$



$$(3) \quad f(x) = \cos x$$

类似可得

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + R_{2m+1}(x)$$

其中

$$R_{2m+1}(x) = \frac{(-1)^{m+1} \cos(\theta x)}{(2m+2)!} x^{2m+2} \quad (0 < \theta < 1)$$

麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$



$$(4) \quad f(x) = (1+x)^\alpha, \quad (x > -1)$$

$$\therefore f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

$$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1) \quad (k=1,2,\cdots)$$

$$\therefore (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + R_n(x)$$

$$\text{其中 } R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!} (1+\theta x)^{\alpha-n-1} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$



$$(5) \quad f(x) = \ln(1+x) \quad (x > -1)$$

$$\text{已知 } f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

因此可得

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x)$$

$$\text{其中 } R_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} \quad (0 < \theta < 1)$$

麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$





### 三、泰勒公式的应用

#### 1. 在近似计算中的应用

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

误差  $|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x|^{n+1}$

$M$  为  $|f^{(n+1)}(x)|$  在包含  $0, x$  的某区间上的上界.

需解问题的类型:

- 1) 已知  $x$  和误差限, 要求确定项数  $n$ ;
- 2) 已知项数  $n$  和  $x$ , 计算近似值并估计误差;
- 3) 已知项数  $n$  和误差限, 确定公式中  $x$  的适用范围.



**例1.** 计算无理数  $e$  的近似值, 使误差不超过  $10^{-6}$ .

**解:** 已知  $e^x$  的麦克劳林公式为

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

令  $x=1$ , 得

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!} \quad (0 < \theta < 1)$$

由于  $0 < e^{\theta} < e < 3$ , 欲使

$$|R_n(1)| < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-6}$$

由计算可知当  $n=9$  时上式成立, 因此

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{9!} \approx 2.718282$$



**例2.** 用近似公式  $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!}$  计算  $\cos x$  的近似值,

使其精确到 **0.005**, 试确定  $x$  的适用范围.

**解:** 近似公式的误差

$$|R_3(x)| = \left| \frac{x^4}{4!} \cos(\theta x) \right| \leq \frac{|x|^4}{24}$$

令  $\frac{|x|^4}{24} \leq 0.005$

解得  $|x| \leq \mathbf{0.588}$

即当  $|x| \leq \mathbf{0.588}$  时, 由给定的近似公式计算的结果能准确到 **0.005**.



## 2. 利用泰勒公式求极限

例3. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x+4} + \sqrt{4-3x} - 4}{x^2}$ .

用洛必达法则不方便！

解：用泰勒公式将分子展到  $x^2$  项, 由于

$$\begin{aligned}\sqrt{3x+4} &= 2\left(1 + \frac{3}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2\left[1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}x\right) + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{3}{4}x\right)^2 + o(x^2)\right] \\ &= 2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{16}x^2 + o(x^2) \\ \sqrt{4-3x} &= 2\left(1 - \frac{3}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} = 2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{16}x^2 + o(x^2) \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{16}x^2 + o(x^2) \\ \therefore \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{16}x^2 + o(x^2)}{x^2} = -\frac{9}{32}\end{aligned}$$



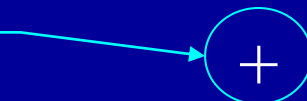
### 3. 利用泰勒公式证明不等式

**例4.** 证明  $\sqrt{1+x} > 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad (x > 0)$ .

**证:**  $\because \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) x^2$$
$$+ \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{2} - 2\right) (1+\theta x)^{-\frac{5}{2}} x^3$$
$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{1}{16} (1+\theta x)^{-\frac{5}{2}} x^3 \quad (0 < \theta < 1)$$

$\therefore \sqrt{1+x} > 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad (x > 0)$





## 3.3 作业

P143-144

1 ; 3 ; 7 ; \*10 (3)



## 内容小结

### 1. 泰勒公式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

其中余项

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = o((x - x_0)^n) \\ (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

当  $x_0 = 0$  时为麦克劳林公式.



## 2. 常用函数的麦克劳林公式 (P142 ~ P144)

$$e^x, \ln(1+x), \sin x, \cos x, (1+x)^\alpha$$

## 3. 泰勒公式的应用

(1) 近似计算

(2) 利用多项式逼近函数

例如  $\sin x$

(3) 其他应用 ———— 求极限, 证明不等式 等.





## 思考与练习

计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} + 2 \cos x - 3}{x^4}.$

解:  $\because e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + o(x^4)$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$$

$$\therefore e^{x^2} + 2 \cos x - 3 = \left(\frac{1}{2!} + 2 \cdot \frac{1}{4!}\right)x^4 + o(x^4)$$

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{7}{12}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{7}{12}$$

## 作业

P145 1;

4; 5; 7; 8;

\*10 (1), (2)



**备用题 1.** 设函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  上具有三阶连续导数, 且  $f(0)=1, f(1)=2, \underline{f'(\frac{1}{2})=0}$ , 证明  $(0,1)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使  $|f'''(\xi)| \geq 24$ .

**证:** 由题设对  $x \in [0,1]$ , 有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\tfrac{1}{2}) + \underline{f'(\tfrac{1}{2})(x - \tfrac{1}{2})} + \frac{1}{2!} f''(\tfrac{1}{2}) (x - \tfrac{1}{2})^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!} f'''(\zeta)(x - \tfrac{1}{2})^3 \\ &= f(\tfrac{1}{2}) + \frac{1}{2!} f''(\tfrac{1}{2}) (x - \tfrac{1}{2})^2 + \frac{1}{3!} f'''(\zeta)(x - \tfrac{1}{2})^3 \\ &\quad \text{(其中 } \zeta \text{ 在 } x \text{ 与 } \tfrac{1}{2} \text{ 之间)} \end{aligned}$$

分别令  $x=0,1$ , 得



$$1 = f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{f''\left(\frac{1}{2}\right)}{2!} \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{f'''(\zeta_1)}{3!} \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \quad (\zeta_1 \in (0, \frac{1}{2}))$$

$$2 = f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{f''\left(\frac{1}{2}\right)}{2!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{f'''(\zeta_2)}{3!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad (\zeta_2 \in (\frac{1}{2}, 1))$$

下式減上式, 得

$$1 = \frac{1}{48} [ f'''(\zeta_2) - f'''(\zeta_1) ] \leq \frac{1}{48} [ |f'''(\zeta_2)| + |f'''(\zeta_1)| ]$$

$$\downarrow \text{令 } |f'''(\xi)| = \max (|f'''(\zeta_2)|, |f'''(\zeta_1)|)$$

$$\leq \frac{1}{24} |f'''(\xi)| \quad (0 < \xi < 1)$$

$$\implies |f'''(\xi)| \geq 24$$



## 2. 证明 $e$ 为无理数 .

证:  $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!} \quad (0 < \theta < 1)$

↓ 两边同乘  $n!$

$$n!e = \text{整数} + \frac{e^\theta}{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

假设  $e$  为有理数  $\frac{p}{q}$  ( $p, q$  为正整数),

则当  $n \geq q$  时, 等式左边为整数;

当  $n \geq 2$  时, 等式右边不可能为整数.

矛盾! 故  $e$  为无理数 .

