

# 第五节

## 函数的极值与

## 最大值最小值

一、函数的极值及其求法

二、最大值与最小值问题



## 一、函数的极值及其求法

**定义:** 设函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  内有定义,  $x_0 \in (a, b)$ , 若存在  $x_0$  的一个邻域, 在其中当  $x \neq x_0$  时,

(1)  $f(x) < f(x_0)$ , 则称  $x_0$  为  $f(x)$  的**极大值点**,

称  $f(x_0)$  为函数的**极大值**;

(2)  $f(x) > f(x_0)$ , 则称  $x_0$  为  $f(x)$  的**极小值点**,

称  $f(x_0)$  为函数的**极小值**.

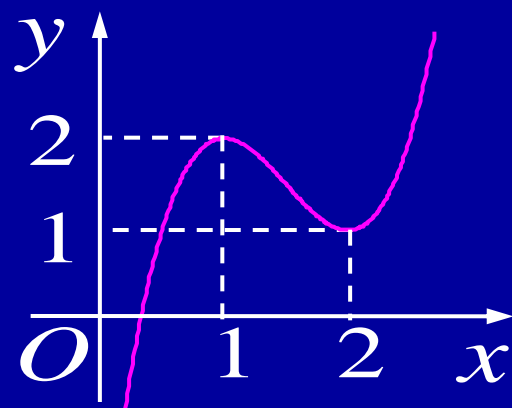
极大值点与极小值点统称为**极值点**.



例如, 函数  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$

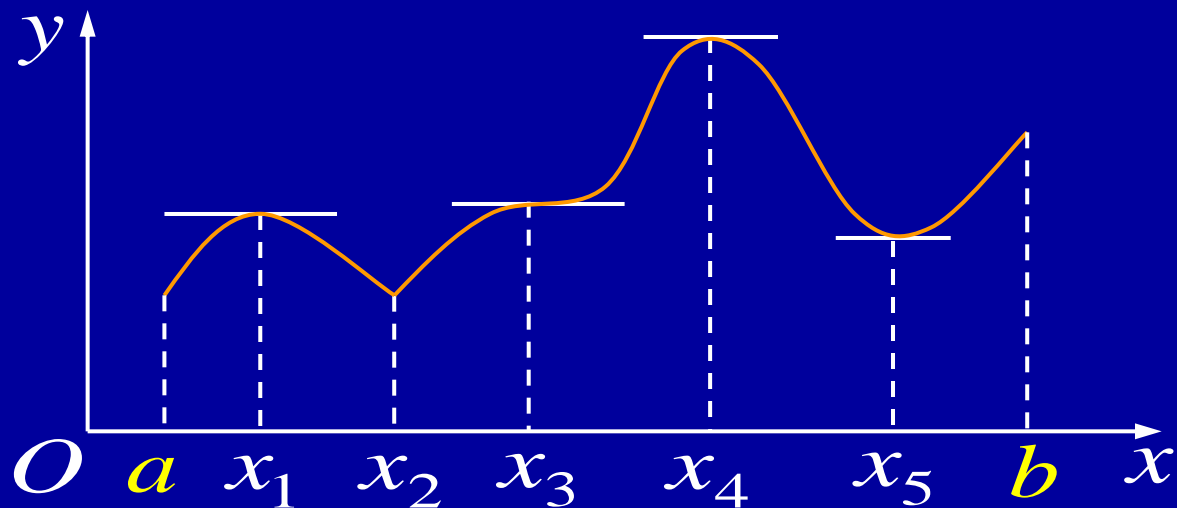
$x = 1$  为极大值点,  $f(1) = 2$  是极大值

$x = 2$  为极小值点,  $f(2) = 1$  是极小值



注意: 1) 函数的极值是函数的局部性质.

2) 对常见函数, 极值可能出现在导数为 0 或不存在的点.



$x_1, x_4$  为极大值点

$x_2, x_5$  为极小值点

$x_3$  不是极值点

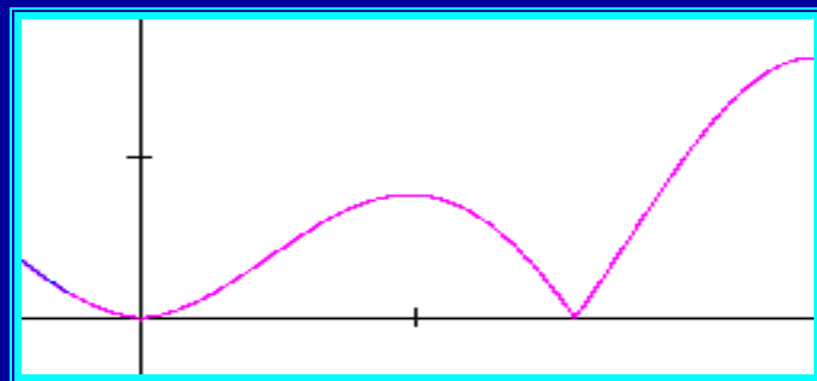


## 定理 1 (极值第一判别法)

设函数  $f(x)$  在  $x_0$  的某邻域内连续, 且在空心邻域内有导数, 当  $x$  由小到大通过  $x_0$  时,

- (1)  $f'(x)$  “左正右负”, 则  $f(x)$  在  $x_0$  取极大值.
- (2)  $f'(x)$  “左负右正”, 则  $f(x)$  在  $x_0$  取极小值;

(自证)



点击图中任意处动画播放\暂停



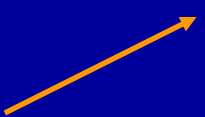
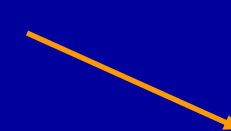
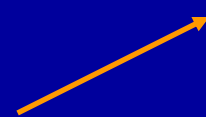
**例1.** 求函数  $f(x) = (x-1)x^{\frac{2}{3}}$  的极值.

**解:** 1) 求导数  $f'(x) = x^{\frac{2}{3}} + (x-1) \cdot \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{x-\frac{2}{5}}{\sqrt[3]{x}}$

2) 求极值可疑点

令  $f'(x) = 0$ , 得  $x_1 = \frac{2}{5}$ ; 令  $f'(x) = \infty$ , 得  $x_2 = 0$

3) 列表判别

$x$	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5}, +\infty)$
$f'(x)$	+	$\infty$	-	0	+
$f(x)$		0		-0.33	

$\therefore x = 0$  是极大值点, 其极大值为  $f(0) = 0$

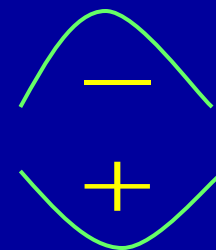
$x = \frac{2}{5}$  是极小值点, 其极小值为  $f(\frac{2}{5}) = -0.33$



**定理2 (极值第二判别法)** 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处具有二阶导数, 且  $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$

(1) 若  $f''(x_0) < 0$ , 则  $f(x)$  在点  $x_0$  取极大值;

(2) 若  $f''(x_0) > 0$ , 则  $f(x)$  在点  $x_0$  取极小值.



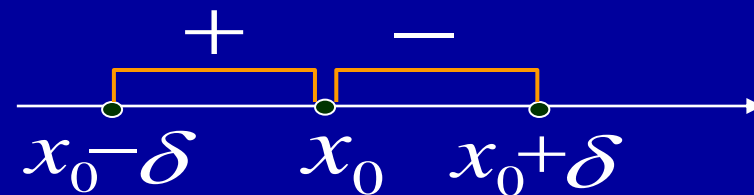
**证:** (1) 
$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}$$

由  $f''(x_0) < 0$  知, 存在  $\delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时,  $\frac{f'(x)}{x - x_0} < 0$

故当  $x_0 - \delta < x < x_0$  时,  $f'(x) > 0$ ;

当  $x_0 < x < x_0 + \delta$  时,  $f'(x) < 0$ ,

由第一判别法知  $f(x)$  在  $x_0$  取极大值.



(2) 类似可证.



**例2.** 求函数  $f(x) = (x^2 - 1)^3 + 1$  的极值.

**解:** 1) 求导数

$$\underline{f'(x) = 6x(x^2 - 1)^2}, \quad \underline{f''(x) = 6(x^2 - 1)(5x^2 - 1)}$$

2) 求驻点

令  $f'(x) = 0$ , 得驻点  $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$

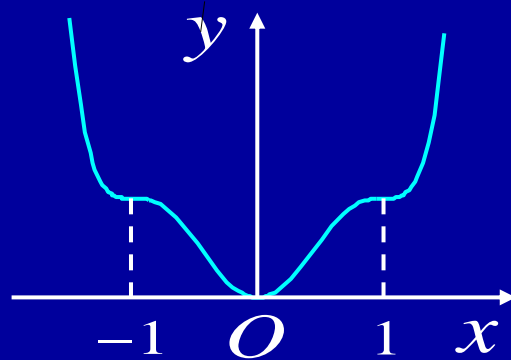
3) 判别

因  $f''(0) = 6 > 0$ , 故  $f(0) = 0$  为极小值;

又  $f''(-1) = f''(1) = 0$ , 故需用第一判别法判别.

由于  $f'(x)$  在  $x = \pm 1$  左右邻域内不变号,

$\therefore f(x)$  在  $x = \pm 1$  没有极值.



## 二、最大值与最小值问题

若函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 则其最值只能在极值点或端点处达到 .

求函数最值的方法:

(1) 求  $f(x)$  在  $(a, b)$  内的极值可疑点

$$x_1, x_2, \cdots, x_m$$

(2) 最大值

$$M = \max\{f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_m), f(a), f(b)\}$$

最小值

$$m = \min\{f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_m), f(a), f(b)\}$$





## 特别:

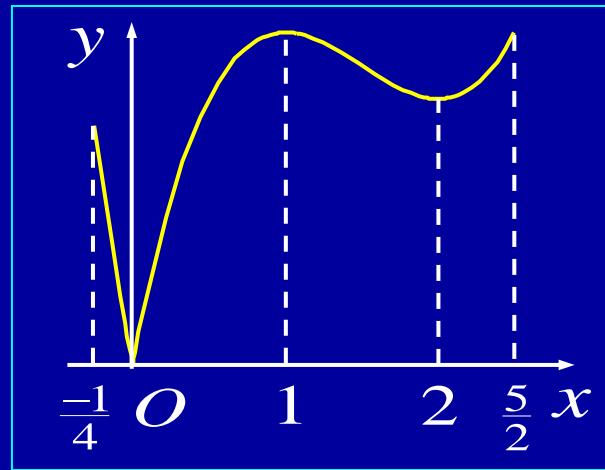
- 当  $f(x)$  在  $[a, b]$  内只有一个极值可疑点时, 若在此点取极大(小)值, 则也是最大(小)值.
- 当  $f(x)$  在  $[a, b]$  上单调时, 最值必在端点处达到.
- 对应用问题, 有时可根据实际意义判别求出的可疑点是否为最大值点或最小值点.



**例3.** 求函数  $f(x) = |2x^3 - 9x^2 + 12x|$   
在闭区间  $[-\frac{1}{4}, \frac{5}{2}]$  上的最大值和最小值.

**解:** 显然  $f(x) \in C[-\frac{1}{4}, \frac{5}{2}]$ , 且

$$f(x) = \begin{cases} -(2x^3 - 9x^2 + 12x), & -\frac{1}{4} \leq x \leq 0 \\ 2x^3 - 9x^2 + 12x, & 0 < x \leq \frac{5}{2} \end{cases}$$



$$f'(x) = \begin{cases} -6x^2 + 18x - 12 = -6(x-1)(x-2), & -\frac{1}{4} \leq x < 0 \\ 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2), & 0 < x \leq \frac{5}{2} \end{cases}$$

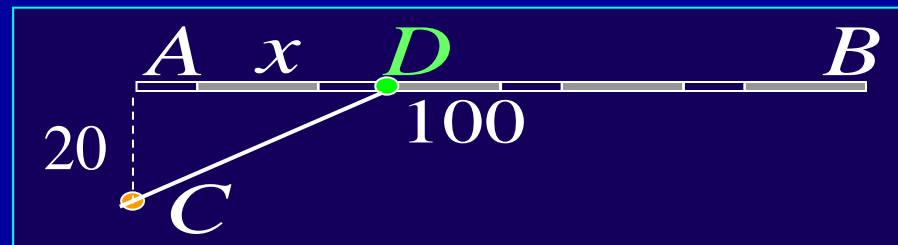
$f(x)$  在  $[-\frac{1}{4}, \frac{5}{2}]$  内有极值可疑点  $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$

$$f(-\frac{1}{4}) = 3\frac{19}{32}, f(0) = 0, f(1) = 5, f(2) = 4, f(\frac{5}{2}) = 5$$

故函数在  $x = 0$  取最小值 0; 在  $x = 1$  及  $\frac{5}{2}$  取最大值 5.



**例4.** 铁路上  $AB$  段的距离为100 km, 工厂  $C$  距  $A$  处20km,  $AC \perp AB$ , 要在  $AB$  线上选定一点  $D$  向工厂修一条公路, 已知铁路与公路每公里货运价之比为3:5, 为使货物从  $B$  运到工厂  $C$  的运费最省, 问  $D$  点应如何取?



**解:** 设  $AD = x$  (km), 则  $CD = \sqrt{20^2 + x^2}$ , 总运费

$$y = 5k\sqrt{20^2 + x^2} + 3k(100 - x) \quad (0 \leq x \leq 100)$$

$$y' = k\left(\frac{5x}{\sqrt{400 + x^2}} - 3\right), \quad y'' = 5k \frac{400}{(400 + x^2)^{3/2}}$$

令  $y' = 0$ , 得  $x = 15$ , 又  $y''|_{x=15} > 0$ , 所以  $x = 15$  为唯一的极小值点, 从而为最小值点, 故  $AD = 15$  km 时运费最省.



**例5.** 把一根直径为  $d$  的圆木锯成矩形梁，问矩形截面的高  $h$  和  $b$  应如何选择才能使梁的抗弯截面模量最大？

**解：**由力学分析知矩形梁的抗弯截面模量为

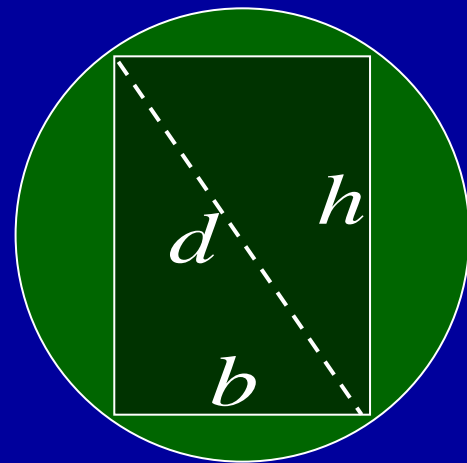
$$w = \frac{1}{6} b h^2 = \frac{1}{6} b (d^2 - b^2), \quad b \in (0, d)$$

令  $w' = \frac{1}{6} (d^2 - 3b^2) = 0$

得  $b = \sqrt{\frac{1}{3}} d$

从而有  $h = \sqrt{d^2 - b^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} d$

即  $d : h : b = \sqrt{3} : \sqrt{2} : 1$



由实际意义可知，所求最值存在，驻点只有一个，故所求结果就是最好的选择。



**例6.** 设有质量为 5 kg 的物体置于水平面上, 受力  $\vec{F}$  作用开始移动, 设摩擦系数  $\mu = 0.25$ , 问力  $F$  与水平面夹角  $\alpha$  为多少时才可使力  $\vec{F}$  的大小最小?

**解:** 克服摩擦的水平分力  $F_x = F \cos \alpha$

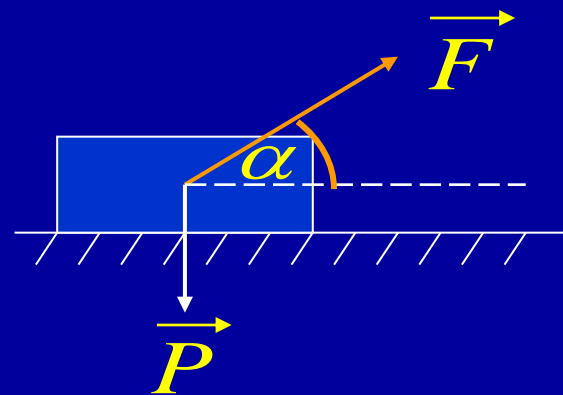
正压力  $P - F_y = 5g - F \sin \alpha$

$$\therefore F \cos \alpha = \mu (5g - F \sin \alpha)$$

即 
$$F = \frac{5\mu g}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}, \quad \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

令 
$$\varphi(\alpha) = \cos \alpha + \mu \sin \alpha$$

则问题转化为求  $\varphi(\alpha)$  的最大值问题.

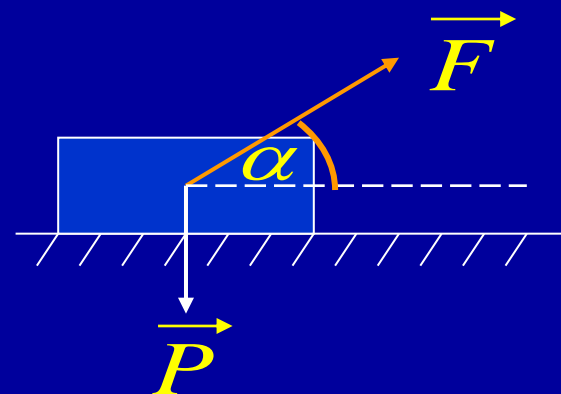


解: .....

即 
$$F = \frac{5\mu g}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}, \quad \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

令 
$$\varphi(\alpha) = \cos \alpha + \mu \sin \alpha$$

则问题转化为求  $\varphi(\alpha)$  的最大值问题.



$$\varphi'(\alpha) = -\sin \alpha + \mu \cos \alpha$$

$$\varphi''(\alpha) = -\cos \alpha - \mu \sin \alpha$$

令  $\varphi'(\alpha) = 0$ , 解得

$$\alpha = \arctan \mu = \arctan 0.25 = 14^\circ 2'$$

而  $\varphi''(\alpha) < 0$ ,  $\therefore \alpha = 14^\circ 2'$  时  $\varphi(\alpha)$  取最大值,

因而  $F$  取最小值.



**例7.** 一张 1.4 m 高的图片挂在墙上, 它的底边高于观察者的眼睛 1.8 m, 问观察者在距墙多远处看图才最清楚(视角  $\theta$  最大)?

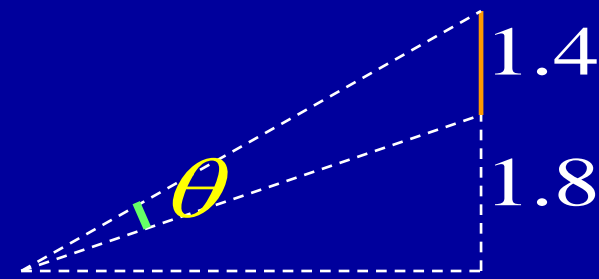
**解:** 设观察者与墙的距离为  $x$  m, 则

$$\theta = \arctan \frac{1.4 + 1.8}{x} - \arctan \frac{1.8}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

$$\theta' = \frac{-3.2}{x^2 + 3.2^2} + \frac{1.8}{x^2 + 1.8^2} = \frac{-1.4(x^2 - 5.76)}{(x^2 + 3.2^2)(x^2 + 1.8^2)}$$

令  $\theta' = 0$ , 得驻点  $x = 2.4 \in (0, +\infty)$

根据问题的实际意义, 观察者最佳站位存在, 驻点又唯一,  
因此观察者站在距离墙 2.4 m 处看图最清楚.



## 3.5 作业

P161-162

1 (5), (9); 3 ; 5 ;

14; 15





**例8.** 设某工厂生产某产品  $x$  千件的成本是  $C(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ , 售出该产品  $x$  千件的收入是  $R(x) = 9x$ , 问是否存在一个取得最大利润的生产水平? 如果存在, 找出它来.

**解:** 售出  $x$  千件产品的利润为

$$p(x) = R(x) - C(x) = -x^3 + 6x^2 - 6x$$

$$p'(x) = -3x^2 + 12x - 6 = -3(x^2 - 4x + 2)$$

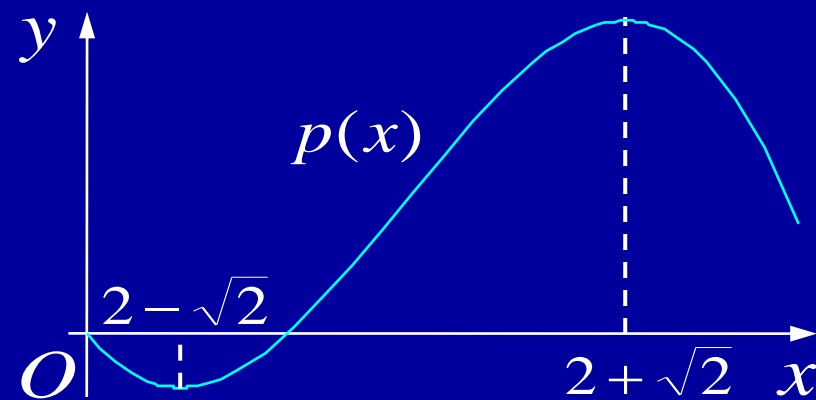
$$\text{令 } p'(x) = 0, \text{ 得 } x_1 = 2 - \sqrt{2} \approx 0.586$$

$$x_2 = 2 + \sqrt{2} \approx 3.414$$

$$\text{又 } p''(x) = -6x + 12,$$

$$p''(x_1) > 0, \quad p''(x_2) < 0$$

故在  $x_2 = 3.414$  千件处达到最大利润,  
而在  $x_1 = 0.586$  千件处发生局部最大亏损.



说明：在经济学中

$C'(x)$  称为边际成本

$R'(x)$  称为边际收入

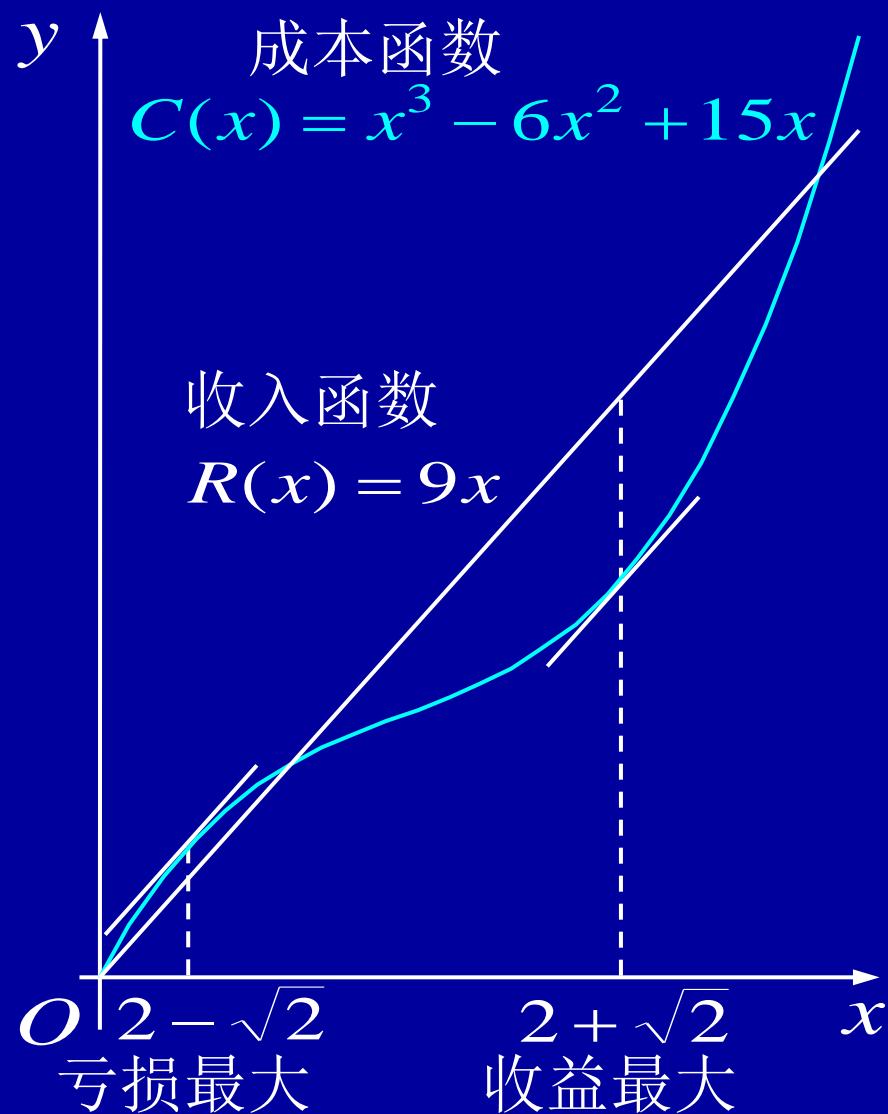
$p'(x)$  称为边际利润

由此例分析过程可见, 在给出最大利润的生产水平上  $p'(x) = 0$ , 即

$$R'(x) = C'(x)$$

即边际收入 = 边际成本

(见右图)



## 内容小结

### 1. 连续函数的极值

(1) 极值可疑点：使导数为0 或不存在的点

(2) 第一充分条件

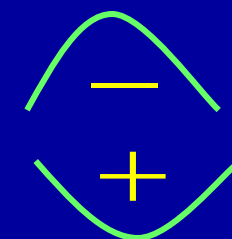
$f'(x)$  过  $x_0$  由正变负  $\implies f(x_0)$  为极大值

$f'(x)$  过  $x_0$  由负变正  $\implies f(x_0)$  为极小值

(3) 第二充分条件

$f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0 \implies f(x_0)$  为极大值

$f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0 \implies f(x_0)$  为极小值



(4) 判别法的推广

定理3



## 2. 连续函数的最值

最值点应在极值点和边界点上找；  
应用题可根据问题的实际意义判别。

### 思考与练习

1. 设  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} = -1$ , 则在点  $a$  处( **B** ).

(A)  $f(x)$  的导数存在, 且  $f'(a) \neq 0$ ;

(B)  $f(x)$  取得极大值;

(C)  $f(x)$  取得极小值;

(D)  $f(x)$  的导数不存在.

提示:

利用极限的保号性



2. 设  $f(x)$  在  $x=0$  的某邻域内连续, 且  $f(0)=0$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 2$ , 则在点  $x=0$  处  $f(x)$  (  $D$  ).

(A) 不可导;

(B) 可导, 且  $f'(0) \neq 0$ ;

(C) 取得极大值;

(D) 取得极小值.

提示: 利用极限的保号性.



3. 设  $y = f(x)$  是方程  $y'' - 2y' + 4y = 0$  的一个解, 若  $f(x_0) > 0$ , 且  $f'(x_0) = 0$ , 则  $f(x)$  在  $x_0$  ( **A** )

(A) 取得极大值;

(B) 取得极小值;

(C) 在某邻域内单调增加; (D) 在某邻域内单调减少.

提示: 将  $f(x)$  代入方程, 令  $x = x_0$ , 得

$$f''(x_0) = -4f(x_0) < 0$$



**备用题 1.** 试问  $a$  为何值时,  $f(x) = a \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$   
在  $x = \frac{2}{3} \pi$  时取得极值, 求出该极值, 并指出它是极大  
还是极小.

**解:**  $\because f'(x) = a \cos x + \cos 3x$ , 由题意应有  $f'(\frac{2}{3} \pi) = 0$

即  $a \cos(\frac{2}{3} \pi) + \cos 3(\frac{2}{3} \pi) = -\frac{1}{2} a + 1 = 0$

$$\therefore a = 2$$

又  $\because f''(x) = -2 \sin x - 3 \sin 3x$ ,

$$f''(\frac{2}{3} \pi) = -2 \sin \frac{2}{3} \pi < 0$$

$$\therefore f(x) \text{ 在 } a = 2 \text{ 时取得极大值: } f(\frac{2}{3} \pi) = \sqrt{3}$$



2. 设  $f(x) = nx(1-x)^n$ ,  $n \in N$ , 试求  $f(x)$  在  $[0,1]$  上的最大值  $M(n)$  及  $\lim_{n \rightarrow \infty} M(n)$ .

解:  $\because f'(x) = n(1-x)^n - nx \cdot n(1-x)^{n-1}$   
 $= n(1-x)^{n-1}[1 - (n+1)x]$

令  $f'(x) = 0$ , 得  $(0,1)$  内的唯一驻点  $x = \frac{1}{n+1}$

易判别  $x$  通过此点时  $f(x)$  由增变减, 故所求最大值为

$$M(n) = f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} M(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e^{-1}$$





**说明:** 极值的判别法( 定理1 ~ 定理2 ) 都是充分的.

当这些充分条件不满足时, 不等于极值不存在.

**例如:**

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2(2 + \sin \frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

$f(0) = 2$  为极大值,

但不满足定理1 ~ 定理2 的条件.

