第三节 分部积分法

由导数公式 $(uv)' = u'v + uv'$

积分得: $uv = \int u'v\,\mathrm{d}x + \int uv'\,\mathrm{d}x$

$$\Longrightarrow \left.\begin{aligned} \int uv'\,\mathrm{d}x &= uv - \int u'v\,\mathrm{d}x \\ \text{或} \quad \int u\,\mathrm{d}v &= uv - \int v\,\mathrm{d}u \end{aligned}\right\} \text{分部积分公式}$$

选取 u 及 v' (或 $\mathrm{d}v$) 的原则:

1) v 容易求得;

2) $\int u'v\,\mathrm{d}x$ 比 $\int uv'\,\mathrm{d}x$ 容易计算.

例1. 求 $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$.

解: 令 $u = x,\ v' = \cos x,$

则 $u' = 1,\ v = \sin x$

$\therefore$ 原式 $= x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x$

$= x\sin x + \cos x + C$

思考: 如何求 $\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x$?

提示: 令 $u = x^2,\ v' = \sin x,$ 则

原式 $= -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,\mathrm{d}x$

$= \cdots$

例2. 求 $\int x\ln x\,\mathrm{d}x$.

解: 令 $u=\ln x,\ v'=x$

则 $u'=\dfrac{1}{x},\quad v=\dfrac{1}{2}x^2$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$$

例3. 求 $\int x \arctan x \, dx$.

解: 令 $u = \arctan x, \; v' = x$

则 $u' = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad v = \dfrac{1}{2}x^2$

$$\therefore \text{原式} = \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}(x - \arctan x) + C$$

例4. 求 $\int e^x \sin x \, dx$.

解: 令 $u = \sin x$, $v' = e^x$, 则

$u' = \cos x$, $v = e^x$

$\therefore$ 原式 $= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$

再令 $u = \cos x$, $v' = e^x$, 则

$u' = -\sin x$, $v = e^x$

$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$

故 原式 = $\frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$

说明: 也可设 $u = e^x$, v' 为三角函数, 但两次所设类型必须一致.

解题技巧: 选取 u 及 v' 的一般方法：

把被积函数视为两个函数之积，按 **“反对幂指三”** 的顺序,

前者为 u 后者为 v'.

反: 反三角函数
对: 对数函数
幂: 幂函数
指: 指数函数
三: 三角函数

例5. 求 $\int \arccos x \, \mathrm{d}x$.

解: 令 $u = \arccos x, \quad v' = 1$

则 $u' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v = x$

原式 $= x\arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$

$= x\arccos x - \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-1/2} \mathrm{d}(1-x^2)$

$= x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$

例6. 求 $\int \frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

解: 令 $u = \ln\cos x,\ v' = \frac{1}{\cos^2 x}$

则 $u' = -\tan x,\quad v = \tan x$

原式 $= \tan x \cdot \ln\cos x + \int \tan^2 x\,\mathrm{d}x$

$= \tan x \cdot \ln\cos x + \int (\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x$

$= \tan x \cdot \ln\cos x + \tan x - x + C$

例7. 求 $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$.

解: 令 $\sqrt{x}=t$, 则 $x=t^2$, $dx=2t\,dt$

原式 $=2\int t\,e^t\,dt$

$\Big\downarrow$ 令 $u=t$, $v'=e^t$

$=2\left(t\,e^t-\int e^t\,dt\right)$

$=2(t\,e^t-e^t)+C$

$=2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$

例8. 求 $\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x \quad (a>0).$

解: 令 $u=\sqrt{x^2+a^2}$, $v'=1$,

则 $u'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $\quad v=x$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x + a^2\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$\therefore$ 原式 $= \dfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2} + \dfrac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$

例9. 求 $I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$.

解: 令 $u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}$, $v' = 1$, 则 $u' = \frac{-2nx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$, $v = x$

$$\therefore \; I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}$$

得递推公式 $I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}I_n$

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)^n}$$

递推公式 $I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n$

说明: 已知 $I_1 = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$ 利用递推公式可求得 I_n.

例如,

$$I_3 = \frac{1}{4a^2} \frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{4a^2} I_2$$

$$= \frac{1}{4a^2} \frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{4a^2} \left(\frac{1}{2a^2} \frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^2} I_1 \right)$$

$$= \frac{1}{4a^2} \frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{8a^4} \frac{x}{x^2+a^2} + \frac{3}{8a^5} \arctan \frac{x}{a} + C$$

例10. 设 $I_n = \int \sec^n x\,\mathrm{d}x$，证明递推公式:

$$I_n = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2}x\cdot\tan x + \frac{n-2}{n-1}I_{n-2} \qquad (n \ge 2)$$

证: $\boxed{I_n} = \int \sec^{n-2}x\cdot \sec^2 x\,\mathrm{d}x$

$$= \sec^{n-2}x\cdot\tan x$$

$$-(n-2)\int \sec^{n-3}x\cdot\sec x\tan x\cdot\tan x\,\mathrm{d}x$$

$$= \sec^{n-2}x\cdot\tan x - (n-2)\int \sec^{n-2}x\cdot(\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x$$

$$= \sec^{n-2}x\cdot\tan x \boxed{-(n-2)I_n} + (n-2)I_{n-2}$$

$$\therefore \quad I_n = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2}x\cdot\tan x + \frac{n-2}{n-1}I_{n-2} \qquad (n \ge 2)$$

说明:

分部积分题目的类型:

1) 直接分部化简积分;

2) 分部产生循环式, 由此解出积分式;

(注意: 两次分部选择的 u , v 函数类型不变, 解出积分后加 C)

例4

3) 对含自然数 n 的积分, 通过分部积分建立递推公式 .

例11. 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 $\dfrac{\cos x}{x}$, 求 $\int x f'(x)\,\mathrm{d}x$.

解:
$$\begin{aligned}\int x f'(x)\,\mathrm{d}x &= \int x\,\mathrm{d}f(x)\\ &= x\,f(x) - \int f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= x\left(\frac{\cos x}{x}\right)' - \frac{\cos x}{x} + C\\ &= -\sin x - 2\frac{\cos x}{x} + C\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{-x\sin x - \cos x}{x^2}}$$

说明: 此题若先求出 $f'(x)$ 再求积分反而复杂.

$$\int x f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(-\cos x + \frac{2\sin x}{x} + \frac{2\cos x}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

例12. 求 $I=\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x.$

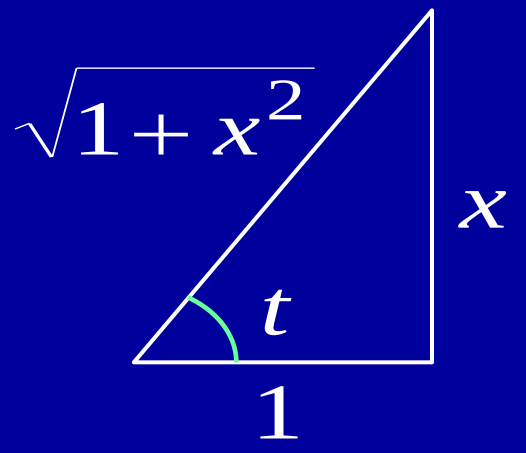
解法1 先换元后分部

令 $t=\arctan x$, 即 $x=\tan t$, 则

$$I=\int \frac{e^{t}}{\sec^3 t}\cdot\sec^2 t\,\mathrm{d}t=\int e^{t}\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$=e^{t}\sin t-\int e^{t}\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$=e^{t}\sin t+e^{t}\cos t-\int e^{t}\cos t\,\mathrm{d}t$$



故 $I=\frac{1}{2}(\sin t+\cos t)e^{t}+C$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right]e^{\arctan x}+C$$

解法2 直接用分部积分法

$$I = \int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$$

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,d\,e^{\arctan x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,e^{\arctan x} + \int \frac{x\,e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,e^{\arctan x} + \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,d\,e^{\arctan x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,e^{\arctan x}(1+x) - I$$

$$\therefore \quad I = \frac{1+x}{2\sqrt{1+x^2}}\,e^{\arctan x} + C$$

作业

P213

4，5，9，14，18，

20， 21，22 ，24

内容小结

分部积分公式 $\int u\,v'\,\mathrm{d}x = u\,v - \int u'v\,\mathrm{d}x$

1. 使用原则：v 易求出，$\int u'v\,\mathrm{d}x$ 易积分

2. 使用经验："反对幂指三"，前 u 后 v'

3. 题目类型：

分部化简；　循环解出；　递推公式

4. 计算格式：

$$\begin{array}{ccc} u & & u' \\ & + & \Big| \; -\int \\ v' & & v \end{array}$$

例13. 求 $I=\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$

解: 令 $t=\ln x$，则 $x=\mathrm{e}^t,\ \mathrm{d}x=\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$

$$\therefore\quad I=\int \mathrm{e}^t\sin t\,\mathrm{d}t \longrightarrow \boxed{=\mathrm{e}^t\sin t-\int \mathrm{e}^t\cos t\,\mathrm{d}t}$$

$\sin t$		$\cos t$		$-\sin t$	
	$+$		$-$		$+\int$
e^t		e^t		e^t	

$$=\mathrm{e}^t(\sin t-\cos t)-I$$

$$\therefore\quad I=\frac{1}{2}\mathrm{e}^t(\sin t-\cos t)+C$$

$$=\frac{1}{2}x[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C$$

可用表格法求
多次分部积分

例14. 求 $\int x^3(\ln x)^4\,\mathrm{d}x$.

解: 令 $u=\ln x$, 则 $x=\mathrm{e}^u$, $\mathrm{d}x=\mathrm{e}^u\mathrm{d}u$

原式 $=\int \mathrm{e}^{3u}u^4\cdot \mathrm{e}^u\mathrm{d}u=\int u^4\,\mathrm{e}^{4u}\mathrm{d}u$

u^4	$4u^3$	$12u^2$	$24u$	24	0
$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-\int$
e^{4u}	$\frac{1}{4}\mathrm{e}^{4u}$	$\frac{1}{4^2}\mathrm{e}^{4u}$	$\frac{1}{4^3}\mathrm{e}^{4u}$	$\frac{1}{4^4}\mathrm{e}^{4u}$	$\frac{1}{4^5}\mathrm{e}^{4u}$

原式 $=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{4u}(u^4-u^3+\frac{3}{4}u^2-\frac{3}{8}u+\frac{3}{32})+C$

$$=\frac{1}{4}x^4(\ln^4 x-\ln^3 x+\frac{3}{4}\ln^2 x-\frac{3}{8}\ln x+\frac{3}{32})+C$$

思考与练习

1. 下述运算错在哪里? 应如何改正?

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{d\sin x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\sin x} - \int \left(\frac{1}{\sin x}\right)' \sin x\,dx$$

$$= 1 - \int \frac{-\cos x}{\sin^2 x} \sin x\,dx = 1 + \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$

$$\therefore \quad \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx - \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = 1, \quad \text{得 } 0 = 1$$

$$\boxed{= \ln\left|\sin x\right| + C}$$

答: 不定积分是原函数族, 相减不应为 0 .

求此积分的正确作法是用换元法 .

2. 求 $I=\int \mathrm{e}^{kx}\cos(ax+b)\,\mathrm{d}x$

提示:

$$\begin{array}{ccc} \cos(ax+b) & -a\sin(ax+b) & -a^2\cos(ax+b) \\ & + \quad\quad - & \quad + \int \\ \mathrm{e}^{kx} & \frac{1}{k}\mathrm{e}^{kx} & \frac{1}{k^2}\mathrm{e}^{kx} \end{array}$$

得 $I=\frac{1}{k}\mathrm{e}^{kx}\cos(ax+b)-\frac{a}{k^2}\mathrm{e}^{kx}\sin(ax+b)-\frac{a^2}{k^2}I$

3. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, $f(x)$ 可微且其反函数 $f^{-1}(x)$ 存在, 证明

$$\int f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = x f^{-1}(x) - F[f^{-1}(x)] + C$$

证: $\int f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = x f^{-1}(x) - \int x\,\mathrm{d}f^{-1}(x)$

$$= x f^{-1}(x) - \int f[f^{-1}(x)]\,\mathrm{d}f^{-1}(x)$$

$$= x f^{-1}(x) - F[f^{-1}(x)] + C$$

注意:

$x = f[f^{-1}(x)]$

备用题. 求不定积分 $\int \frac{x\,\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\,\mathrm{d}x$.

解: 方法1 (先分部, 再换元)

$$\int \frac{x\,\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x-1)$$

$$= 2\int x\,\mathrm{d}\sqrt{\mathrm{e}^x-1} = 2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1} - 2\int\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$$

令 $u=\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$, 则 $\mathrm{d}x = \frac{2u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$

$$= 2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1} - 4\int\frac{u^2+1-1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \qquad \boxed{-4(u-\arctan u)+C}$$

$$= 2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1} - 4\sqrt{\mathrm{e}^x-1} + 4\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1} + C$$

$$\int \frac{x\,\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\,\mathrm{d}x$$

方法2 (先换元,再分部)

令 $u=\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$, 则 $x=\ln(1+u^2)$, $\mathrm{d}x=\dfrac{2u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$

故 $$\int \frac{x\,\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\,\mathrm{d}x=\int \frac{(1+u^2)\ln(1+u^2)}{u}\cdot\frac{2u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

$$=2\int \ln(1+u^2)\,\mathrm{d}u$$

$$=2u\ln(1+u^2)-4\int \frac{1+u^2-1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

$$=2u\ln(1+u^2)-4u+4\arctan u+C$$

$$=2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-4\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+4\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C$$