

# 第五章

## 定积分

积分学  $\begin{cases} \text{不定积分} \\ \text{定积分} \end{cases}$

# 第一节

## 定积分的概念及性质

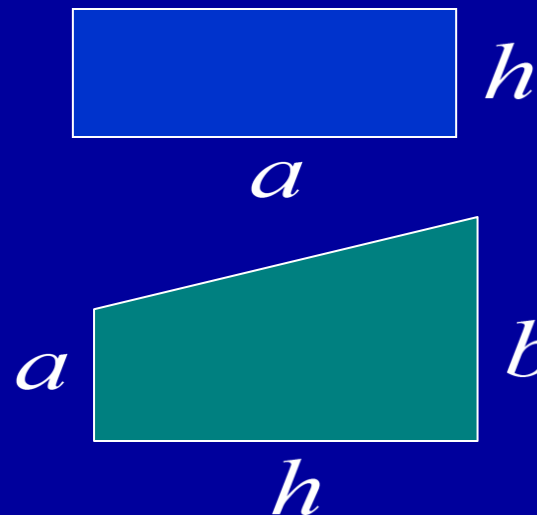
- 一、定积分问题举例
- 二、定积分的定义
- 三、定积分的近似计算
- 四、定积分的性质



# 一、定积分问题举例

$$\text{矩形面积} = ah$$

$$\text{梯形面积} = \frac{h}{2}(a+b)$$

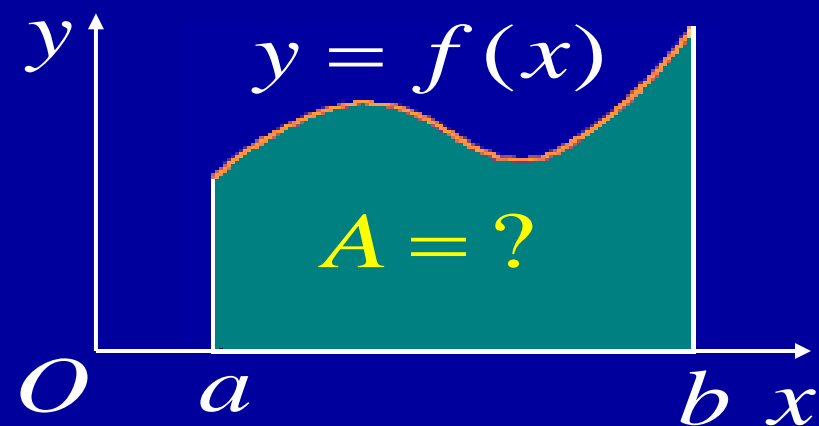


## 1. 曲边梯形的面积

设曲边梯形是由连续曲线

$$y = f(x) \quad (f(x) \geq 0)$$

及  $x$  轴, 以及两直线  $x = a, x = b$  所围成, 求其面积  $A$ .



## 解决步骤:

1) 大化小. 在区间  $[a, b]$  中任意插入  $n-1$  个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

用直线  $x = x_i$  将曲边梯形分成  $n$  个小曲边梯形;

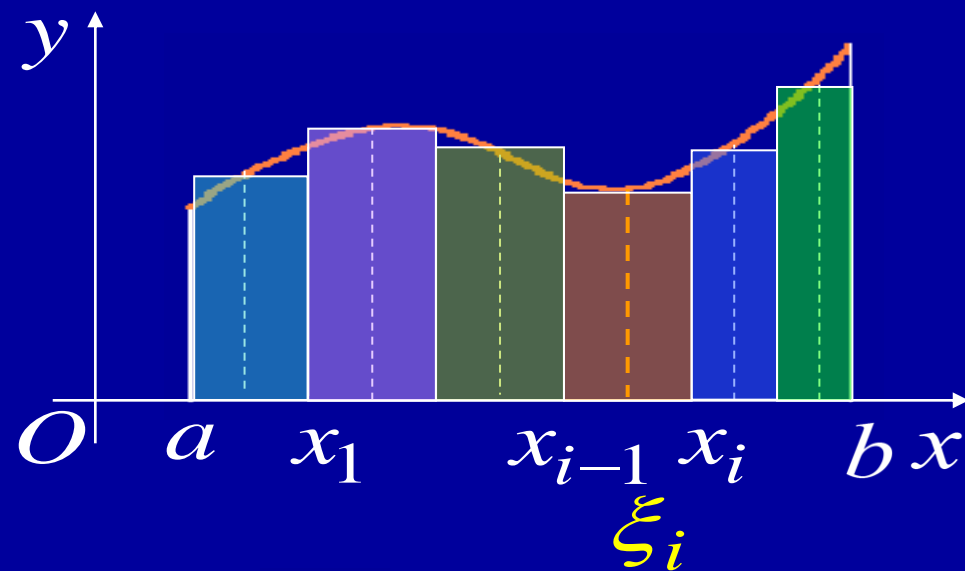
2) 常代变. 在第  $i$  个窄曲边梯形上任取  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

作以  $[x_{i-1}, x_i]$  为底,  $f(\xi_i)$

为高的小矩形, 并以此小矩形面积

近似代替相应窄曲边梯形面积  $\Delta A_i$ ,

得



$$\Delta A_i \approx f(\xi_i) \Delta x_i \quad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \cdots, n)$$

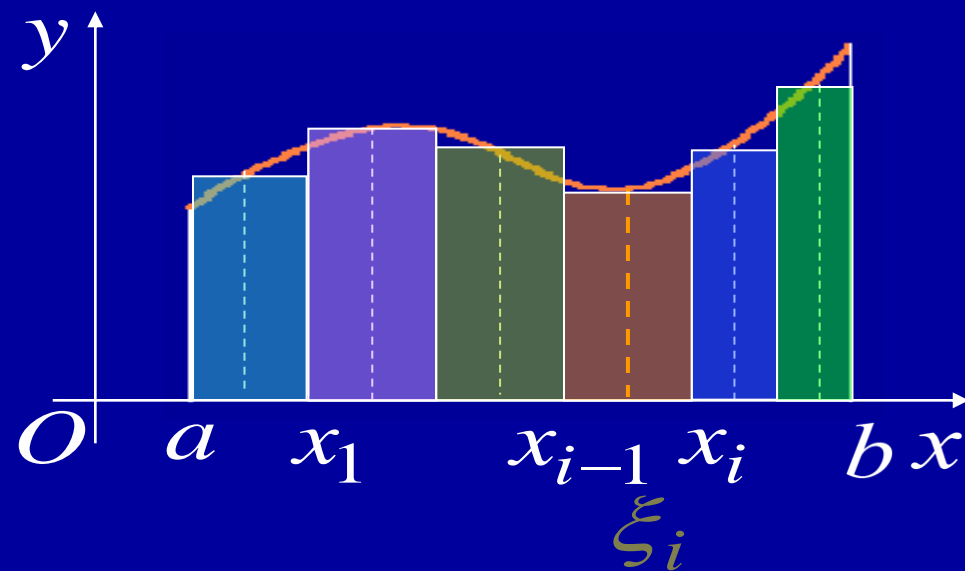


### 3) 近似和.

$$A = \sum_{i=1}^n \Delta A_i \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

4) 取极限. 令  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$ , 则曲边梯形面积

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta A_i \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \end{aligned}$$



## 2. 变速直线运动的路程

设某物体作直线运动, 已知速度  $v = v(t) \in C[T_1, T_2]$ ,  
且  $v(t) \geq 0$ , 求在运动时间内物体所经过的路程  $s$ .

**解决步骤:**

**1) 大化小.** 在  $[T_1, T_2]$  中任意插入  $n-1$  个分点, 将它分成  $n$  个小段  $[t_{i-1}, t_i] (i=1, 2, \dots, n)$ , 在每个小段上物体经过的路程为  $\Delta s_i (i=1, 2, \dots, n)$

**2) 常代变.** 任取  $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ , 以  $v(\xi_i)$  代替变速, 得

$$\Delta s_i \approx v(\xi_i) \Delta t_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$



### 3) 近似和.

$$s \approx \sum_{i=1}^n v(\xi_i) \Delta t_i$$

### 4) 取极限.

$$s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v(\xi_i) \Delta t_i \quad (\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta t_i)$$

上述两个问题的**共性**:

- 解决问题的方法步骤相同:

“大化小, 常代变, 近似和, 取极限”

- 所求量极限结构式相同: 特殊乘积和式的极限



## 二、定积分定义 (P226)

设函数  $f(x)$  定义在  $[a, b]$  上, 若对  $[a, b]$  的任意一种分法

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b, \quad \text{令 } \Delta x_i = x_i - x_{i-1},$$

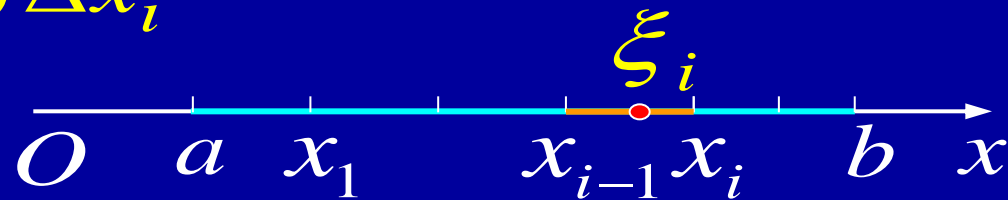
任取  $\xi_i \in [x_i, x_{i-1}]$ , 只要  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\} \rightarrow 0$  时

$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$  总趋于确定的极限  $I$ , 则称此极限  $I$  为函数  $f(x)$  在区间

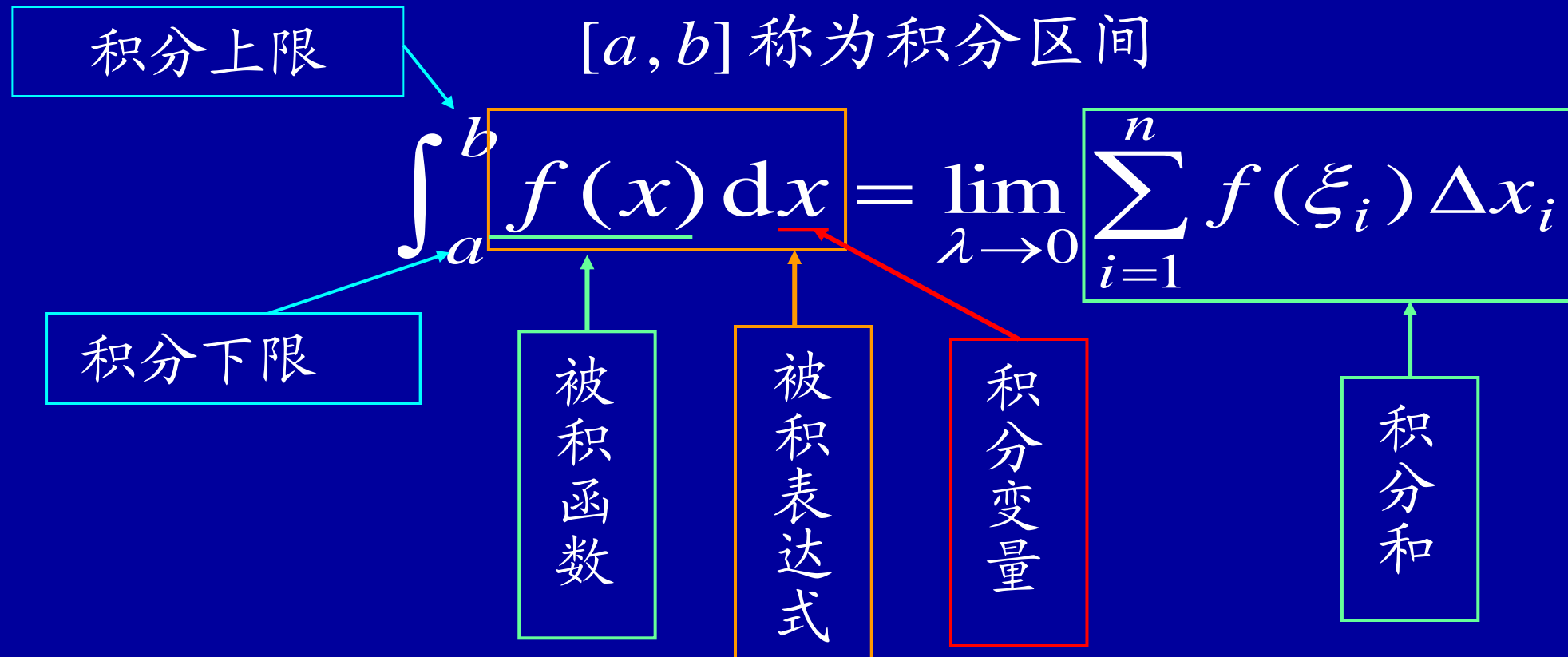
$[a, b]$  上的定积分, 记作  $\int_a^b f(x) dx$  即

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

此时称  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积.







注：定积分仅与被积函数及积分区间有关，  
而与积分变量用什么字母表示无关，即

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$$



函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的**定积分**,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

---

**可积的充分条件:**

**定理1.** 函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续  $\implies f(x)$  在  $[a, b]$  可积.

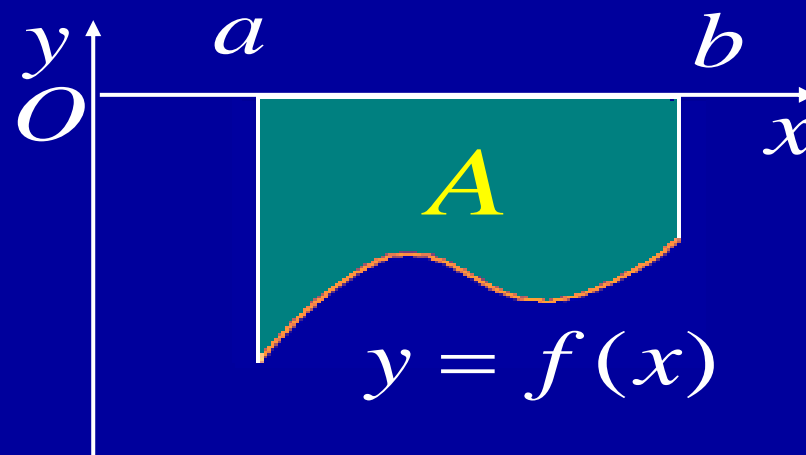
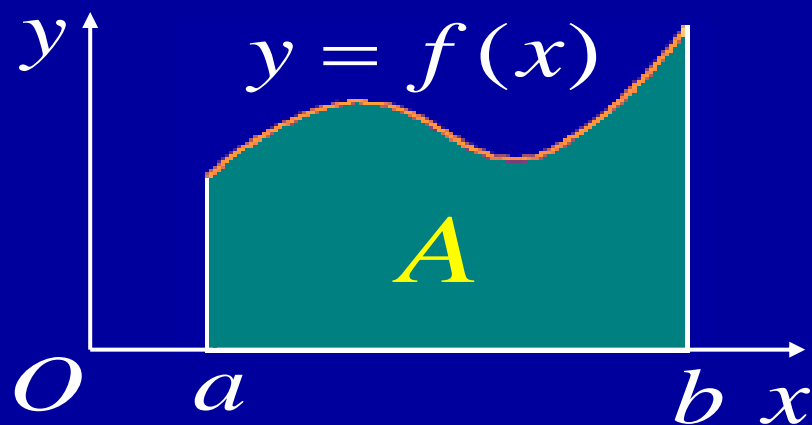
**定理2.** 函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界, 且只有有限个间断点  
 $\implies f(x)$  在  $[a, b]$  可积. (证明略)



## 定积分的几何意义:

$$f(x) > 0, \int_a^b f(x) dx = A \quad \text{曲边梯形面积}$$

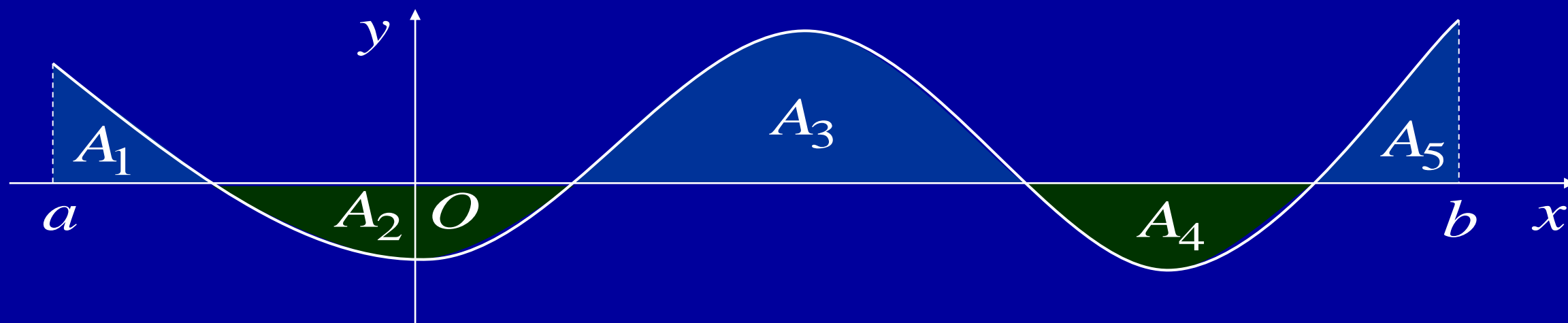
$$f(x) < 0, \int_a^b f(x) dx = -A \quad \text{曲边梯形面积的负值}$$



## 定积分的几何意义:

$$f(x) > 0, \int_a^b f(x) dx = A \quad \text{曲边梯形面积}$$

$$f(x) < 0, \int_a^b f(x) dx = -A \quad \text{曲边梯形面积的负值}$$



$$\int_a^b f(x) dx = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5$$

---- 各部分面积的代数和



## 二、定积分定义 (P226)

设函数  $f(x)$  定义在  $[a, b]$  上, 若对  $[a, b]$  的任意一种分法

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b, \quad \text{令 } \Delta x_i = x_i - x_{i-1},$$

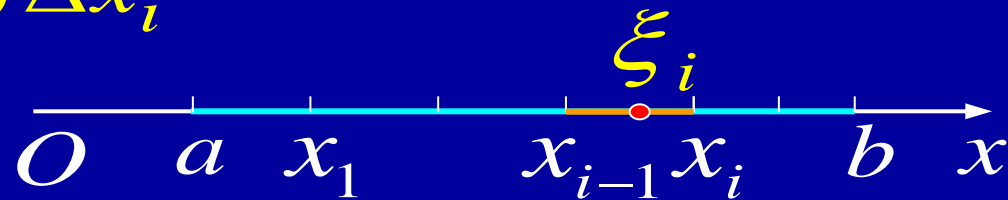
任取  $\xi_i \in [x_i, x_{i-1}]$ , 只要  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\} \rightarrow 0$  时

$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$  总趋于确定的极限  $I$ , 则称此极限  $I$  为函数  $f(x)$  在区间

$[a, b]$  上的定积分, 记作  $\int_a^b f(x) dx$  即

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

此时称  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积.



## 二、定积分定义 (P226)

设函数  $f(x)$  定义在  $[a, b]$  上可积, 对区间  $[a, b]$  进行  $n$  等分, 即

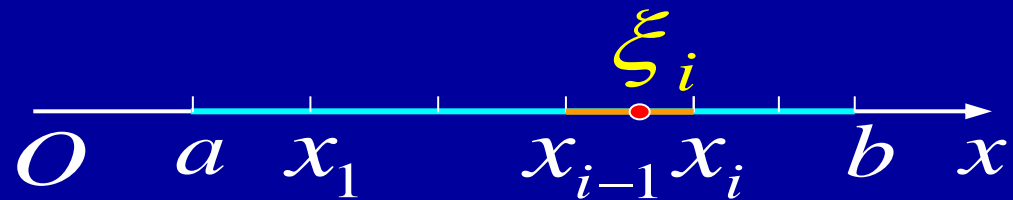
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b, \Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n},$$

取  $\xi_i = x_i = a + \frac{i}{n}(b-a),$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right) \frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x) dx$$

若  $a=0, b=1$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \frac{1}{n} = \int_a^b f(x) dx$$



**例1.** 利用定义计算定积分  $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$ .

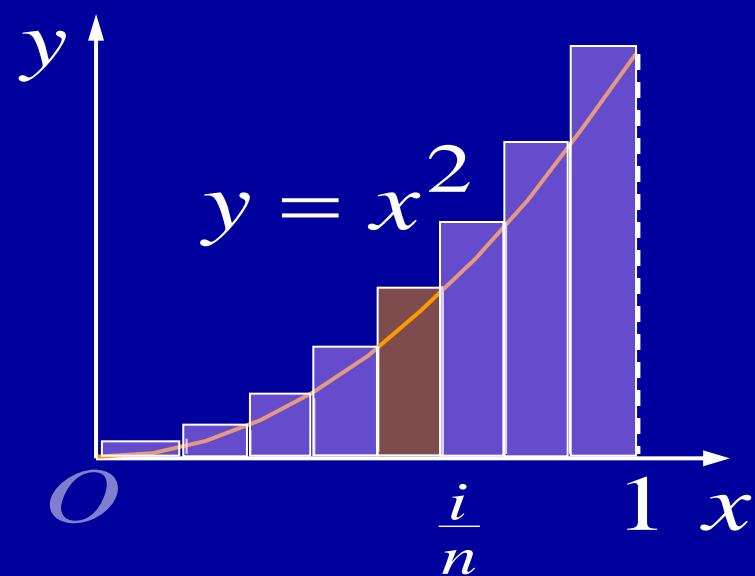
**解:** 将  $[0,1]$   $n$  等分, 分点为  $x_i = \frac{i}{n}$  ( $i = 0, 1, \cdots, n$ )

取

$$\xi_i = \frac{i}{n}, \quad \Delta x_i = \frac{1}{n} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

则

$$f(\xi_i) \Delta x_i = \xi_i^2 \Delta x_i = \frac{i^2}{n^3}$$



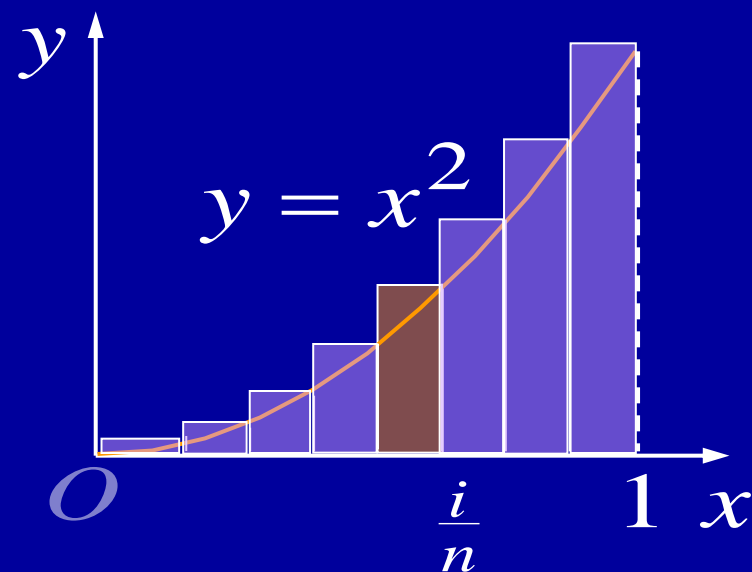
$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

注

$$= \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

注. 当  $n$  较大时, 此值可作为  $\int_0^1 x^2 dx$  的近似值

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^1 x^2 dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \Delta x_i \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$





例2. 用定积分表示下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \frac{i}{n}}$$

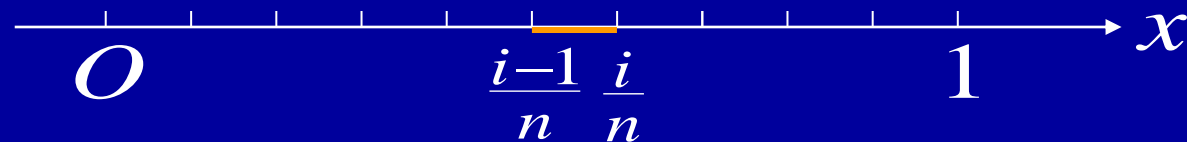
$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}$$

解:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \frac{i}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n}$$

$\xleftarrow{\quad} \Delta x_i$   
 $\nwarrow \xi_i$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+x} \, dx$$



$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left( \frac{i}{n} \right)^p \frac{1}{n}$$

$\xleftarrow{\quad} \Delta x_i$   
 $\nwarrow \xi_i$

$$= \int_0^1 x^p \, dx$$

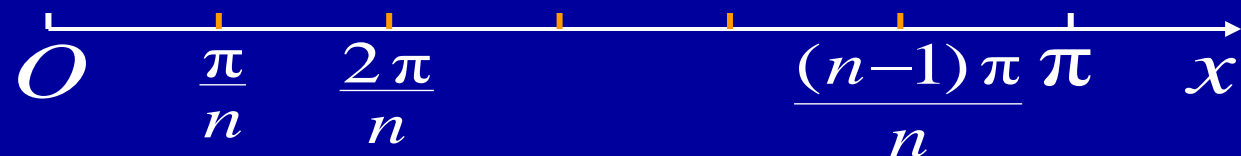


## 思考与练习

1. 用定积分表示下述极限：

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right]$$

解:  $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \, dx$



或  $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\pi \cdot \frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \sin \pi x \, dx$



思考：如何用定积分表示下述极限

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{n} + \sin \frac{(n+1)\pi}{n} \right]$$

提示：  $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} \cdot \frac{\pi}{n}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{(n+1)\pi}{n}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x \, dx$$

极限为 0 !



### 三、定积分的近似计算

例1

设  $f(x) \in C[a, b]$ , 则  $\int_a^b f(x) dx$  存在, 根据定积分定义  
可得如下近似计算方法:

将  $[a, b]$  分成  $n$  等份:  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ,

$$x_i = a + i \cdot \Delta x \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

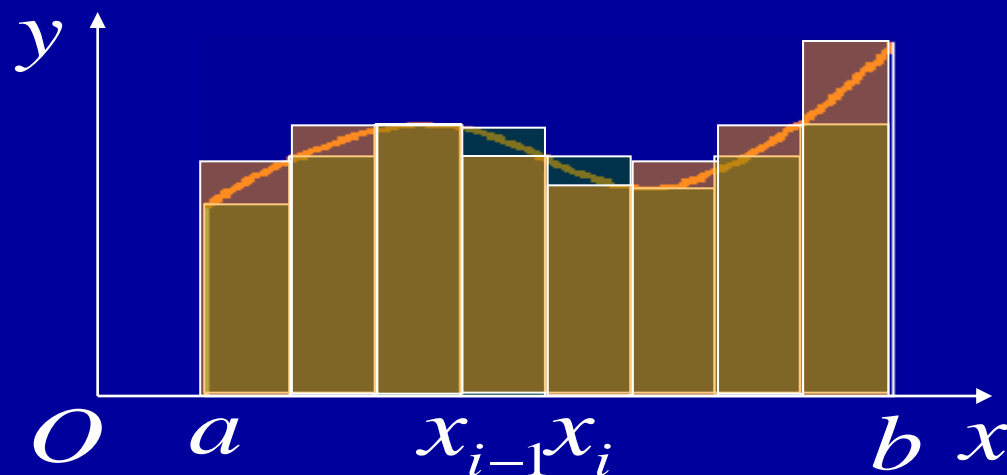
记  $f(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n)$

#### 1. 左矩形公式

$$\int_a^b f(x) dx \approx y_0 \Delta x + y_1 \Delta x + \dots + y_{n-1} \Delta x$$

#### 2. 右矩形公式

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx y_1 \Delta x + y_2 \Delta x + \dots + y_n \Delta x \\ &= \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n) \end{aligned}$$

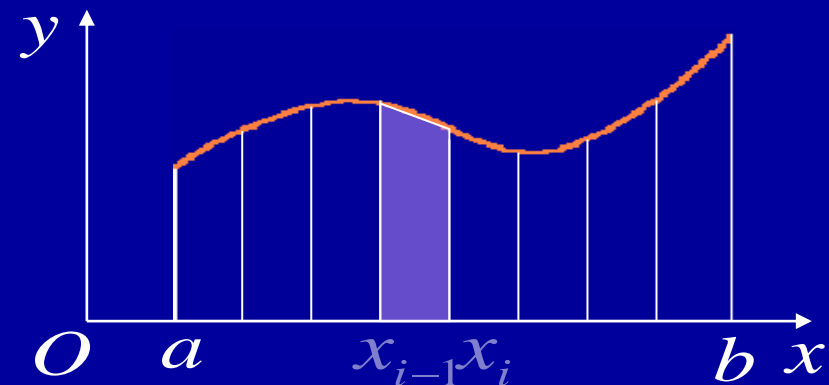


### 3. 梯形公式

$$\int_a^b f(x) dx$$

$$\approx \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} [y_{i-1} + y_i] \Delta x$$

$$= \frac{b-a}{n} \left[ \frac{1}{2} (y_0 + y_n) + (y_1 + \cdots + y_{n-1}) \right]$$

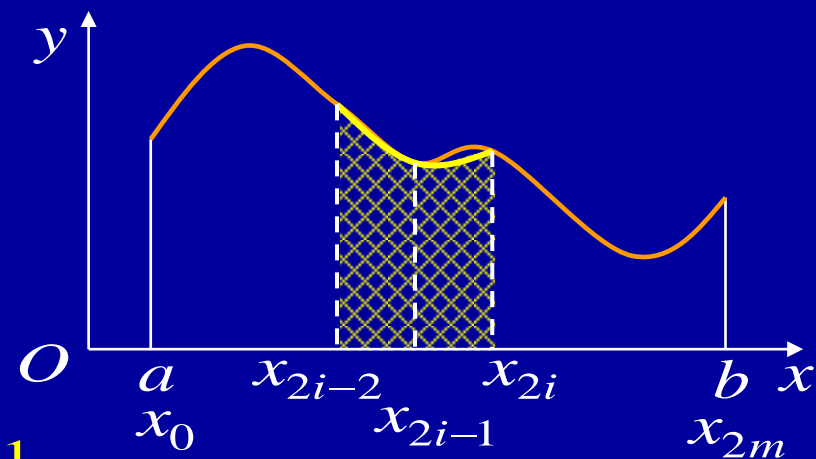


### 4. 抛物线法公式

推导

$$\int_a^b f(x) dx$$

$$\approx \frac{b-a}{6m} \left[ y_0 + y_{2m} + 4 \sum_{i=1}^m y_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^{m-1} y_{2i} \right]$$



**例3.** 用梯形公式和抛物线法公式

计算定积分  $I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$  的近似值.

(取  $n = 10$ , 计算时取5位小数)

**解:** 计算  $y_i$  (见右表)

用梯形公式得  $I \approx 3.13993$

用抛物线法公式得  $I \approx 3.14159$

积分准确值为

$$I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = \pi = 3.1415926 \dots$$

$i$	$x_i$	$y_i$
0	0.0	4.00000
1	0.1	3.96040
2	0.2	3.84615
3	0.3	3.66972
4	0.4	3.44828
5	0.5	3.20000
6	0.6	2.94118
7	0.7	2.68456
8	0.8	2.43902
9	0.9	2.20994
10	1.0	2.00000



#### 四、定积分的性质 (设所列定积分都存在)

$$1. \int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx \implies \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$2. \int_a^b dx = b - a$$

$$3. \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (k \text{ 为常数})$$

$$4. \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

**证:** 左端  $= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)] \Delta x_i$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \pm \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i = \text{右端}$$



$$5. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

**证:** 当  $a < c < b$  时,



因  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积,

所以在分割区间时, 可以永远取  $c$  为分点, 于是

$$\sum_{[a, b]} f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{[a, c]} f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{[c, b]} f(\xi_i) \Delta x_i$$

令  $\lambda \rightarrow 0$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$





当  $a, b, c$  的相对位置任意时, 例如

$$a < b < c,$$

则有



$$\int_a^c f(x) \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x + \int_b^c f(x) \mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_a^b f(x) \mathrm{d}x &= \int_a^c f(x) \mathrm{d}x - \int_b^c f(x) \mathrm{d}x \\ &= \int_a^c f(x) \mathrm{d}x + \int_c^b f(x) \mathrm{d}x \end{aligned}$$



6. 若在  $[a, b]$  上  $f(x) \geq 0$ , 则  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

证:  $\because \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \geq 0$

$$\therefore \int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \geq 0$$

推论1. 若在  $[a, b]$  上  $f(x) \leq g(x)$ , 则

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$



**推论2.**  $\left| \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x \quad (a < b)$

**证:**  $\because -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

$$\therefore -\int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x$$

即  $\left| \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x$

**7.** 设  $M = \max_{[a, b]} f(x)$ ,  $m = \min_{[a, b]} f(x)$ , 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \leq M(b-a) \quad (a < b)$$



例4. 试证:  $1 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{\pi}{2}$ .

证: 设  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ , 则在  $(0, \frac{\pi}{2})$  上, 有

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2} (x - \tan x) < 0$$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}^-\right) < f(x) < f(0^+)$$

即  $\frac{2}{\pi} < f(x) < 1, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$

故  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx$

即  $1 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{\pi}{2}$



## 8. 积分中值定理

若  $f(x) \in C[a, b]$ , 则至少存在一点  $\xi \in [a, b]$ , 使

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$$

**证:** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最小值与最大值分别为  $m, M$ ,  
则由**性质7**可得

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

根据闭区间上连续函数**介值**定理, 在  $[a, b]$  上至少存在一点  $\xi \in [a, b]$ ,  
使

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

因此定理成立.

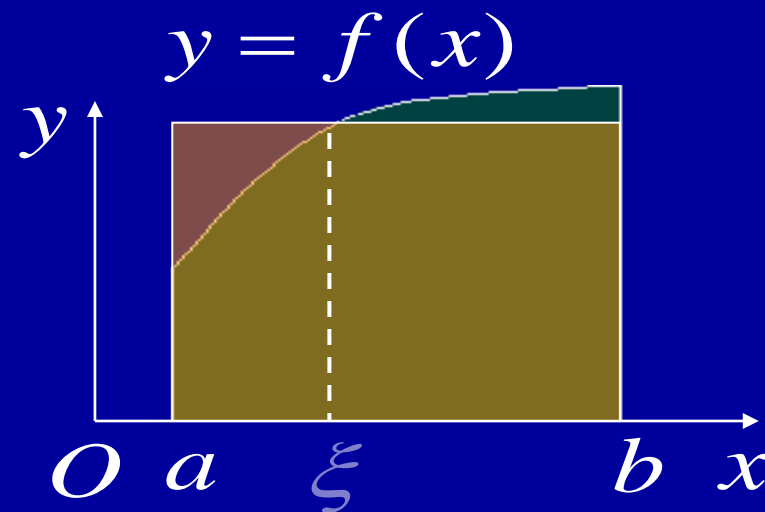


说明:

- 积分中值定理对  $a < b$  或  $a > b$  都成立.

- 可把  $\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} = f(\xi)$

理解为  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的平均值. 因



$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} = \frac{1}{b-a} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \frac{b-a}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)$$

故它是有限个数的平均值概念的推广.



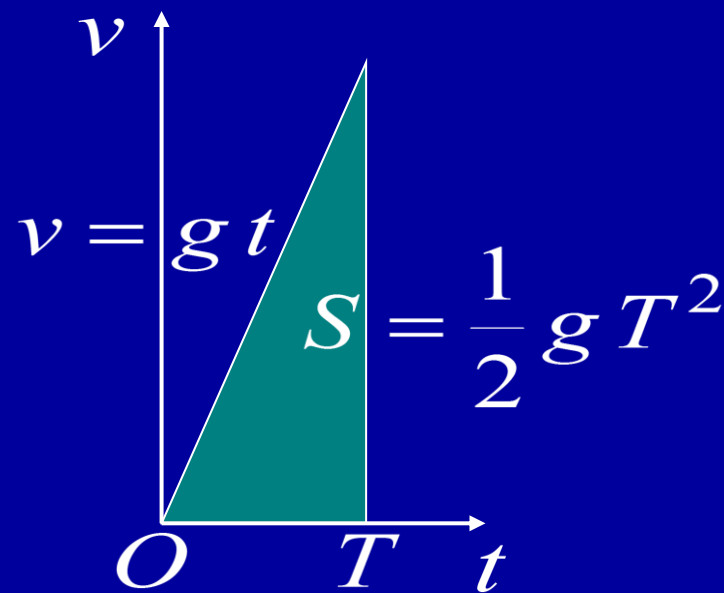
**例5.** 计算从 0 秒到  $T$  秒这段时间内自由落体的平均速度.

**解:** 已知自由落体速度为

$$v = gt$$

故所求平均速度

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \frac{1}{T-0} \int_0^T gt \, dt \\ &= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} g T^2 = \frac{gT}{2}\end{aligned}$$



# 5.1 作业

P236-237

4 (4) ;     7 (2) (4);

10 (4) ;     12(1) , (2) ;

13 (5)





# 内容小结

## 1. 定积分的定义 — 乘积和式的极限

—————> 近似计算  $\left\{ \begin{array}{l} \text{矩形公式} \\ \text{梯形公式} \\ \text{抛物线法公式} \end{array} \right.$

## 2. 定积分的性质

## 3. 积分中值定理

—————> 连续函数在区间上的平均值公式

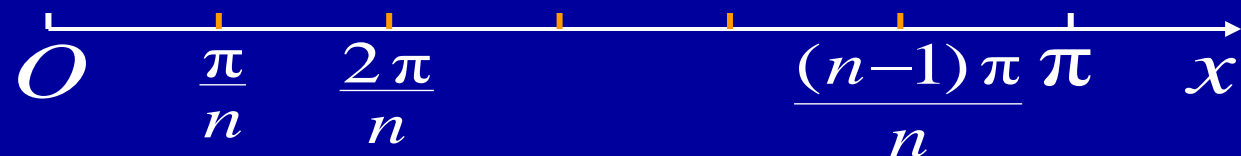


## 思考与练习

1. 用定积分表示下述极限：

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right]$$

解:  $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \, dx$



或  $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\pi \cdot \frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \sin \pi x \, dx$



思考：如何用定积分表示下述极限

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{n} + \sin \frac{(n+1)\pi}{n} \right]$$

提示：  $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} \cdot \frac{\pi}{n}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{(n+1)\pi}{n}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x \, dx$$

极限为 0！



2. P235 题3

3. P236 题13 (2), (4)

题13(4) 解: 设  $f(x) = x - \ln(1+x)$ , 则

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} > 0, \quad x \in (0, 1]$$

$$\implies f(x) \nearrow$$

$$\implies f(x) > f(0) = 0, \quad x \in (0, 1]$$

$$\implies \int_0^1 f(x) dx > 0$$

$$\text{即} \quad \int_0^1 x dx > \int_0^1 \ln(1+x) dx$$

