第六章

定积分的应用

利用元素法研究：

定积分在几何上的应用

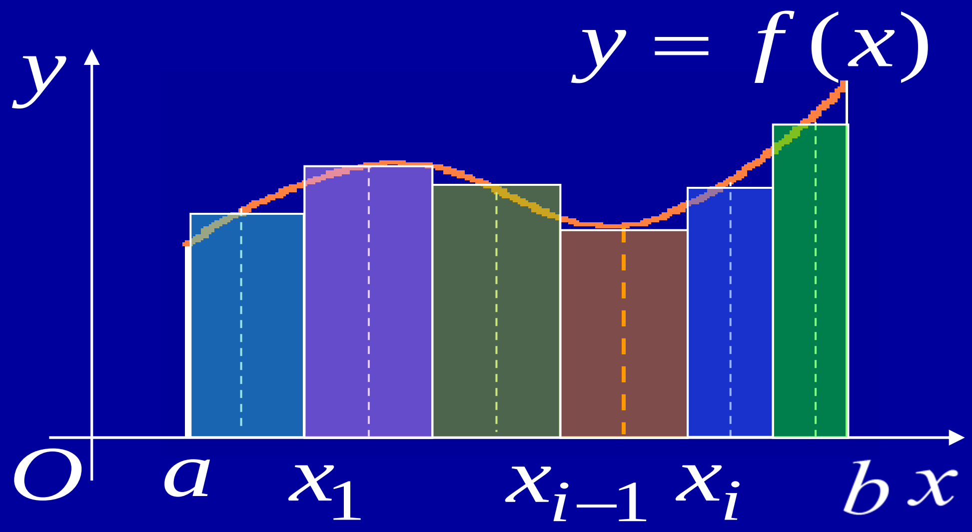
定积分在物理上的应用

第一节 定积分的元素法

一、什么问题可以用定积分解决？

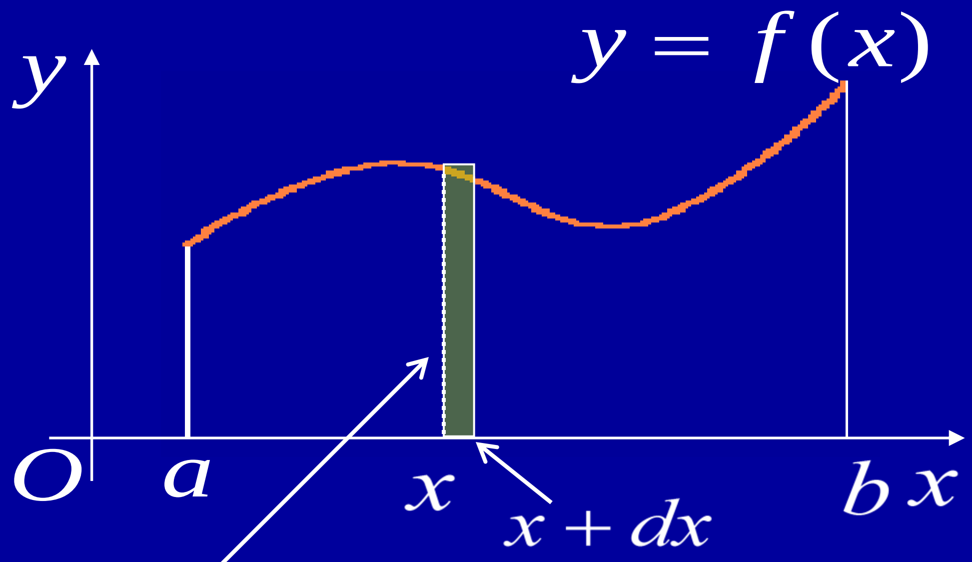
二、如何应用定积分解决问题？

回顾：曲边梯形的面积



$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

回顾：曲边梯形的面积



面积元素

$$\int_a^b \boxed{f(x)\,\mathrm{d}x} = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

一、什么问题可以用定积分解决？

1) 所求量 U 是与区间 $[a, b]$ 上的某函数 $f(x)$ 有关的一个整体量；

2) U 对区间 $[a, b]$ 具有可加性，即可通过

“大化小, 常代变, 近似和, 取极限”

表示为 $$U = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

定积分定义 $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

二、如何应用定积分解决问题？

第一步: 利用 “化整为零，以常代变” 求出局部量的近似值

——— 微分表达式

$$\mathrm{d}U = f(x)\,\mathrm{d}x$$

第二步: 利用 “积零为整，无限累加” 求出整体量的精确值

——— 积分表达式

$$U = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

这种分析方法称为**元素法**(或**微元分析法**)

元素的几何形状常取为: 条, 带, 段, 环, 扇, 片 等

第二节
定积分在几何学上的应用

一、 平面图形的面积

二、已知平行截面面积函数的立体体积

三、 平面曲线的弧长

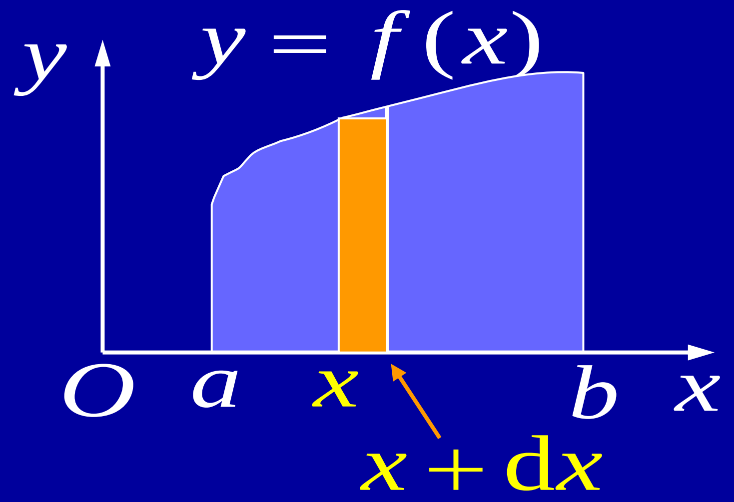
一、平面图形的面积

1. 直角坐标情形

设曲线 $y = f(x)\,(\geq 0)$ 与直线 $x = a,\, x = b\ (a < b)$ 及 x 轴所围曲边梯形面积为 A，则

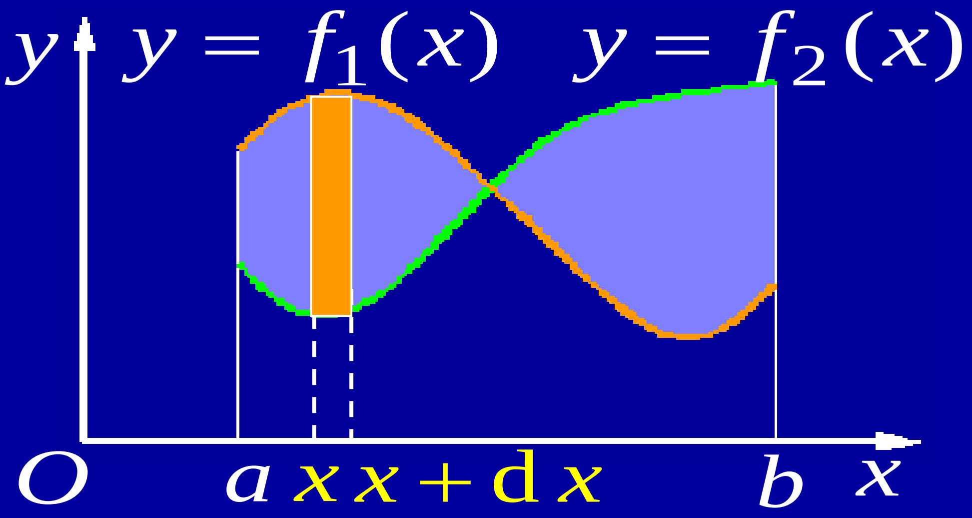
$$\mathrm{d}A = f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



右下图所示图形面积为

$$A = \int_a^b \left| f_1(x) - f_2(x) \right| \mathrm{d}x$$



例1. 计算两条抛物线 $y^2 = x,\ y = x^2$ 在第一象限所围图形的面积.

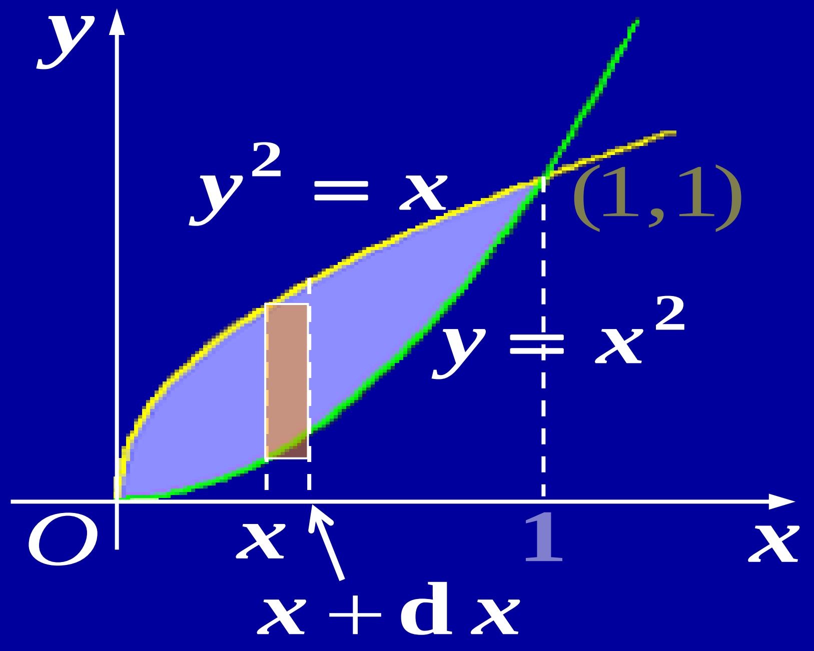
解: 由 $\begin{cases} y^2 = x \\ y = x^2 \end{cases}$ 得交点 $(0,0),(1,1)$

$$\mathrm{d}A = (\sqrt{x} - x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$\therefore \quad A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

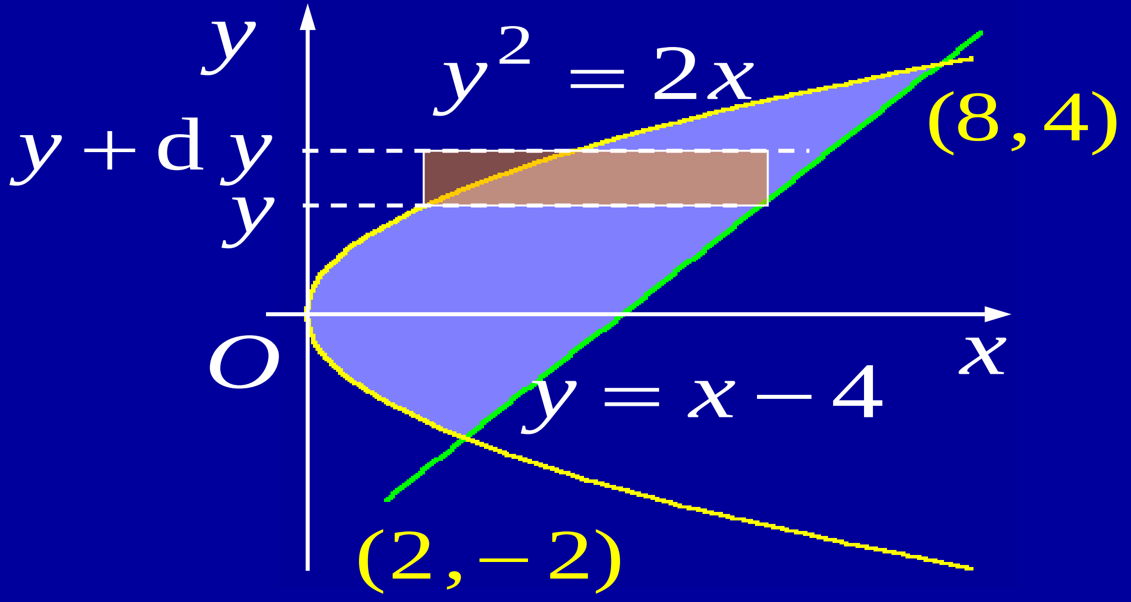
$$= \frac{1}{3}$$



例2. 计算抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围图形的面积.

解: 由 $\begin{cases} y^2=2x \\ y=x-4 \end{cases}$ 得交点

$(2,-2),(8,4)$



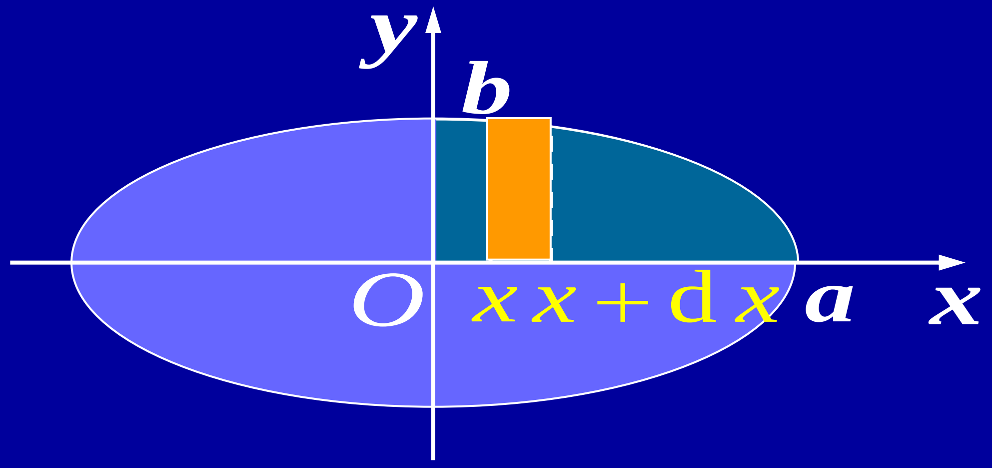
为简便计算, 选取 y 作积分变量, 则有

$$\therefore \quad A=\int_{-2}^{4}\left(y+4-\tfrac{1}{2}y^2\right)\mathrm{d}y$$

$$=\left[\tfrac{1}{2}y^2+4y-\tfrac{1}{6}y^3\right]_{-2}^{4}=18$$

例3. 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围图形的面积 .

解: 利用对称性 , 有 $\mathrm{d}A = y\,\mathrm{d}x$



$$A = 4\int_0^a y\,\mathrm{d}x$$

利用椭圆的参数方程

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

应用定积分换元法得

$$A = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\cdot(-a\sin t)\,\mathrm{d}t = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t$$

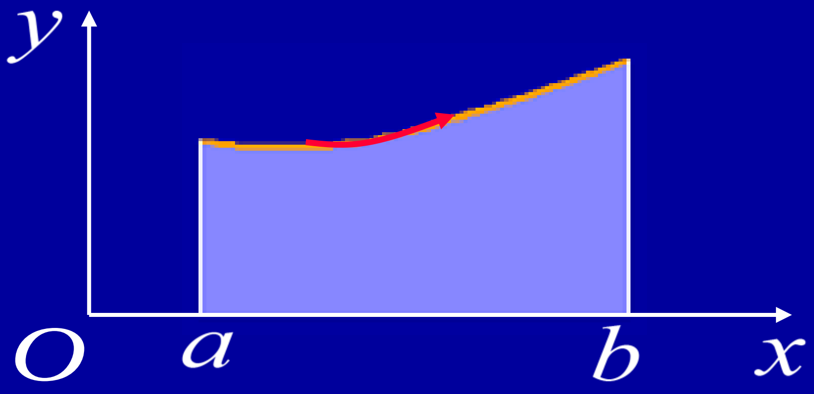
$$= 4ab\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \pi ab$$

当 $a=b$ 时得圆面积公式

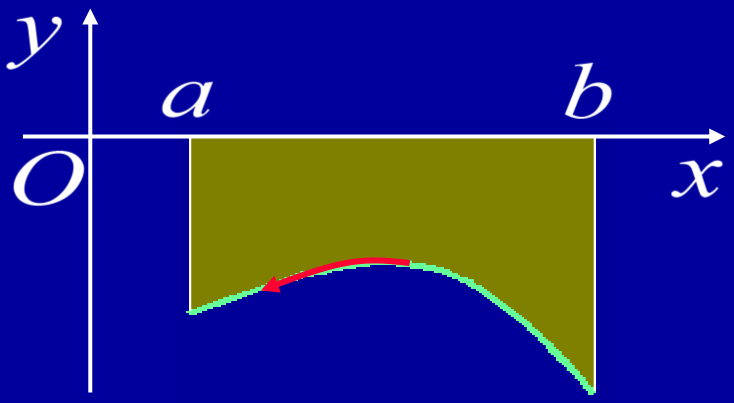
一般地，当曲边梯形的曲边由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

给出时，按顺时针方向规定起点和终点的参数值 t_1，t_2



(t_1 对应 $x=a$)

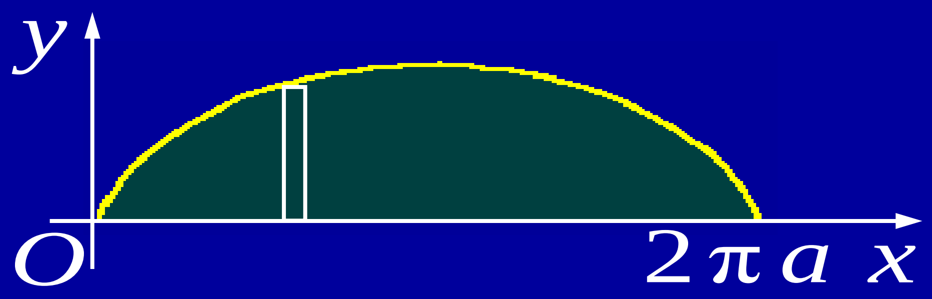


(t_1 对应 $x=b$)

则曲边梯形面积 $A = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$

例4. 求由摆线 $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)\ (a > 0)$ 的一拱与 x 轴所围平面图形的面积.

解: $dA = y dx = a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t)\,\mathrm{d}t$



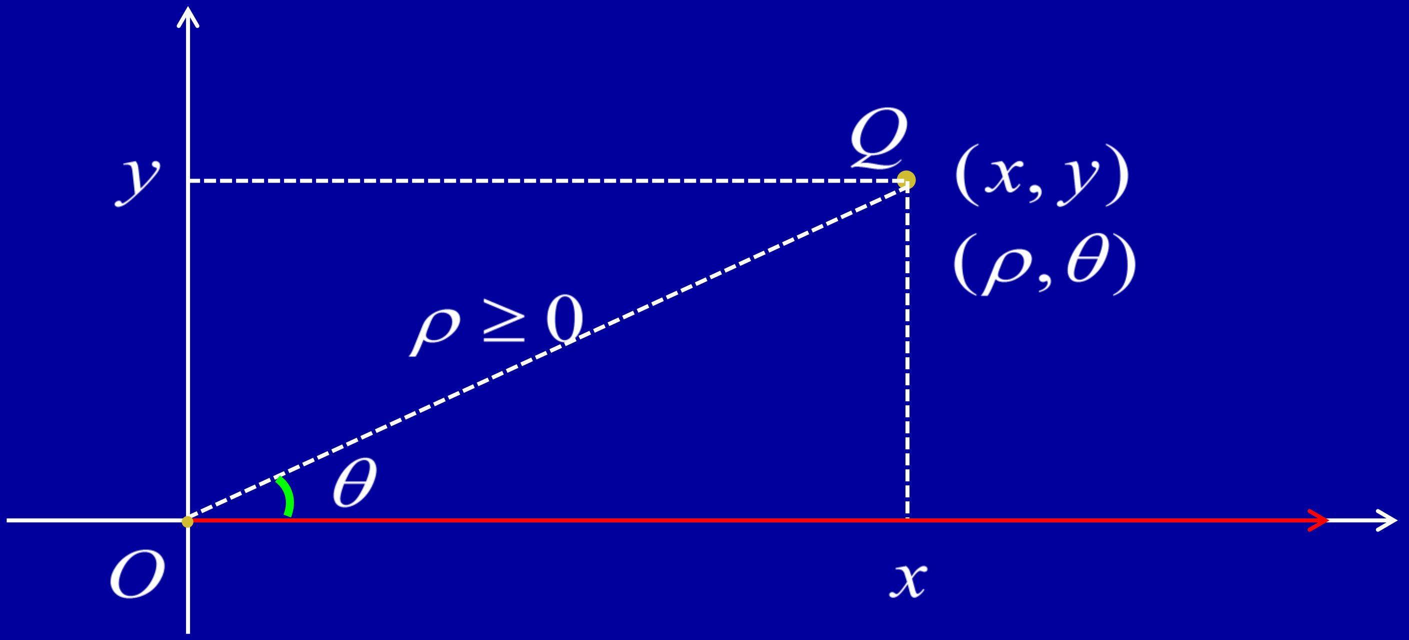
$$A = \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt$$

$$= 4a^2 \int_0^{2\pi} \sin^4 \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$$

$$= 8a^2 \int_0^{\pi} \sin^4 u\,\mathrm{d}u \qquad (令\ u = \frac{t}{2})$$

$$= 16a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 u\,\mathrm{d}u = 16a^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = 3\pi a^2$$

2. 极坐标情形



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

2. 极坐标情形

设 $\varphi(\theta) \in C[\alpha, \beta]$, $\varphi(\theta) \ge 0$, 求由曲线 $\rho = \varphi(\theta)$

及射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 围成的曲边扇形的面积.

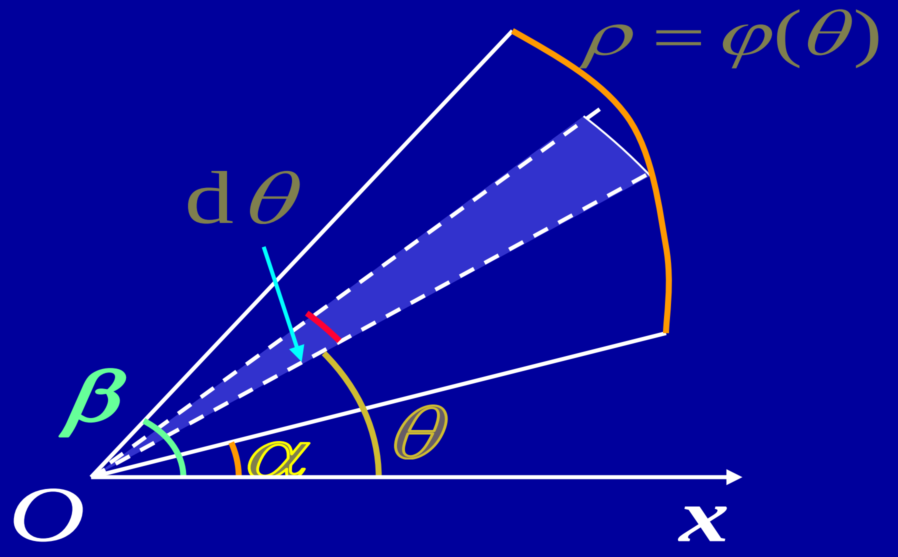
在区间 $[\alpha, \beta]$ 上任取小区间 $[\theta, \theta + \mathrm{d}\theta]$

则对应该小区间上曲边扇形面积的近似值为

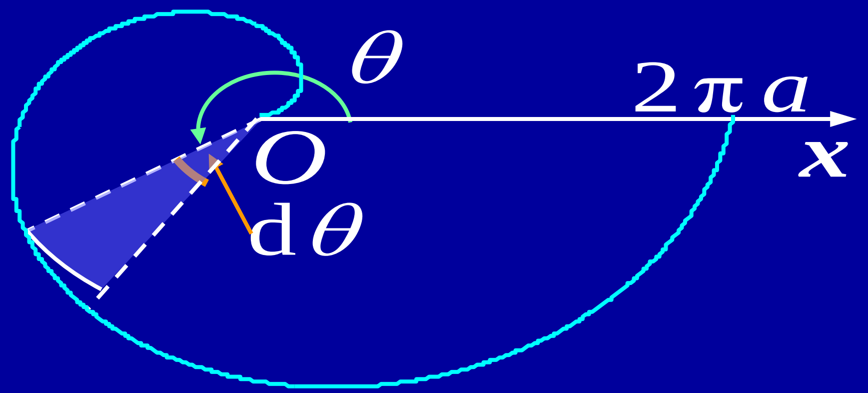
$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2 \, \mathrm{d}\theta$$

所求曲边扇形的面积为

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \varphi^2(\theta) \, \mathrm{d}\theta$$



例5. 计算阿基米德螺线 $\rho = a\theta\ (a>0)$ 对应 θ 从 0 变到 2π 所围图形面积.



解: $A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(a\theta)^2\,\mathrm{d}\theta$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{3}\theta^3\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{4}{3}\pi^3 a^2$$

例6. 计算心形线 $\rho = a(1+\cos\theta)\ (a>0)$ 所围图形的面积 .

解: $A = 2\int_0^{\pi} \frac{1}{2} a^2 (1+\cos\theta)^2 \,\mathrm{d}\theta$

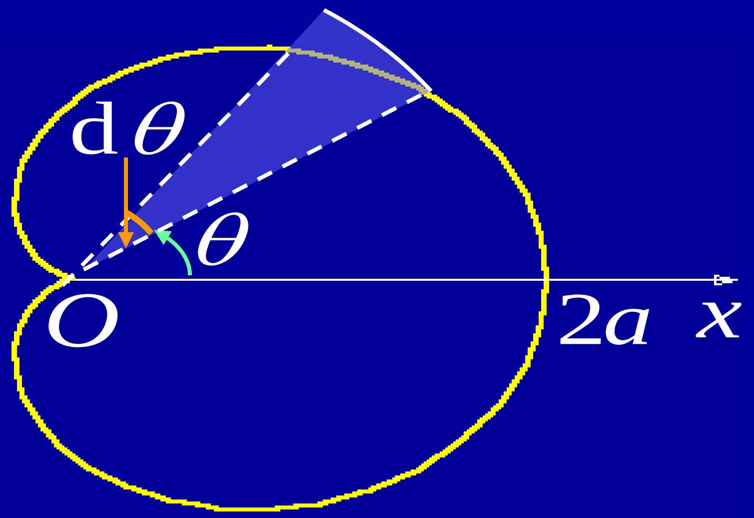
(利用对称性)

$= a^2 \int_0^{\pi} 4\cos^4 \frac{\theta}{2} \,\mathrm{d}\theta$

令 $t = \frac{\theta}{2}$

$= 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \,\mathrm{d}t$

$= 8a^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi a^2$



例7. 计算心形线 $\rho = a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$ 与圆 $\rho = a$

所围图形的面积 .

解: 利用对称性，所求面积

$$A = \frac{1}{2}\pi a^2 + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2} a^2 \underline{(1+\cos\theta\,)}^2 \, \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2}\pi a^2 + a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2}\pi a^2 + a^2 (\frac{3}{4}\pi - 2)$$

$$= \frac{5}{4}\pi a^2 - 2a^2$$

例8. 求双纽线 $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$ 所围图形面积 .

解: 利用对称性, 则所求面积为

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} a^2 \cos 2\theta \, \mathrm{d}\theta$$

$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \, \mathrm{d}(2\theta)$$

$$= a^2 [\sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2$$