第二节 定积分在几何学上的应用

一、 平面图形的面积

二、已知平行截面面积函数的立体体积

三、 平面曲线的弧长

二、已知平行截面面积函数的立体体积

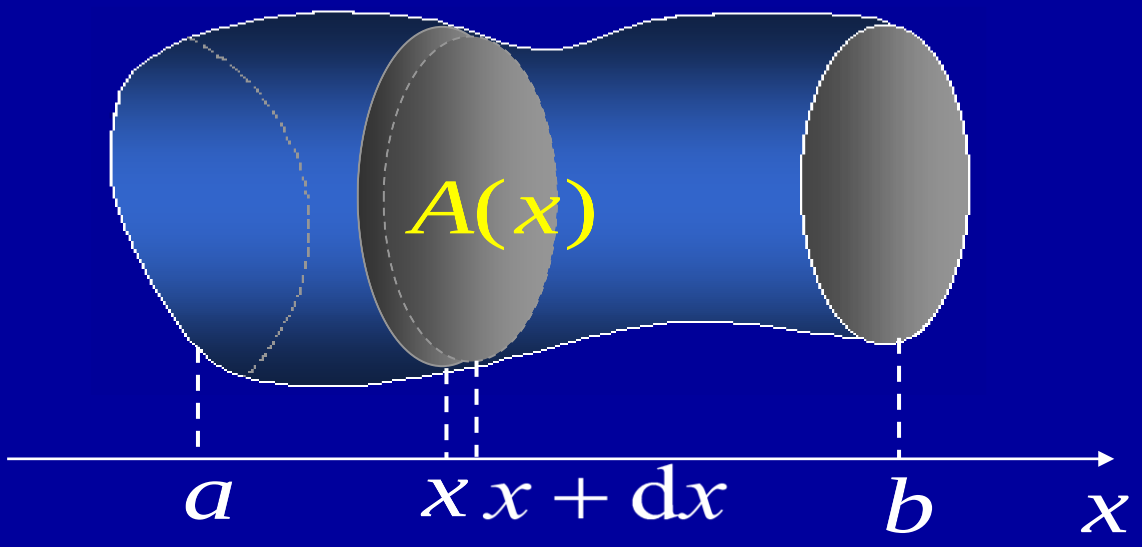
设所给立体垂直于x轴的截面面积为$A(x)$, $A(x)$在$[a,b]$上连续,

则对应于小区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 的体积元素为

$$\mathrm{d}V = A(x)\,\mathrm{d}x$$

因此所求立体体积为

$$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$



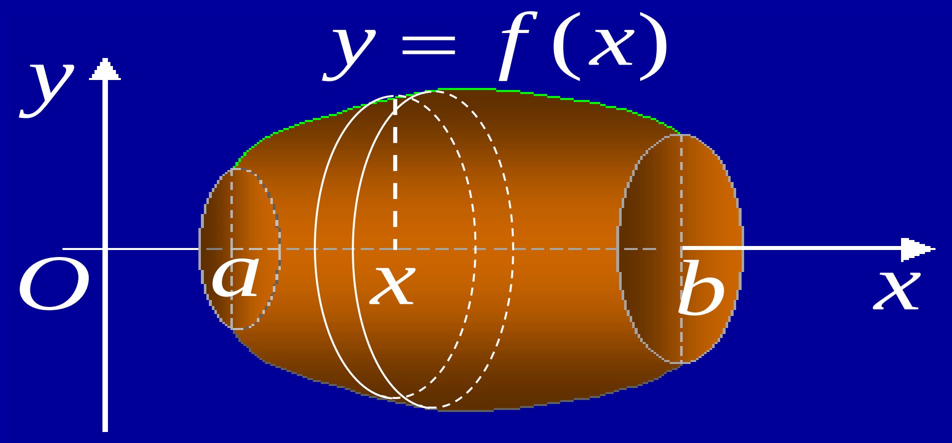
HIGHER EDUCATION PRESS

特别地,

I. 当考虑连续曲线段 $y=f(x)\ (a\le x\le b)$

绕 x 轴旋转一周围成的立体体积时, 有

$$V=\int_a^b \pi[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

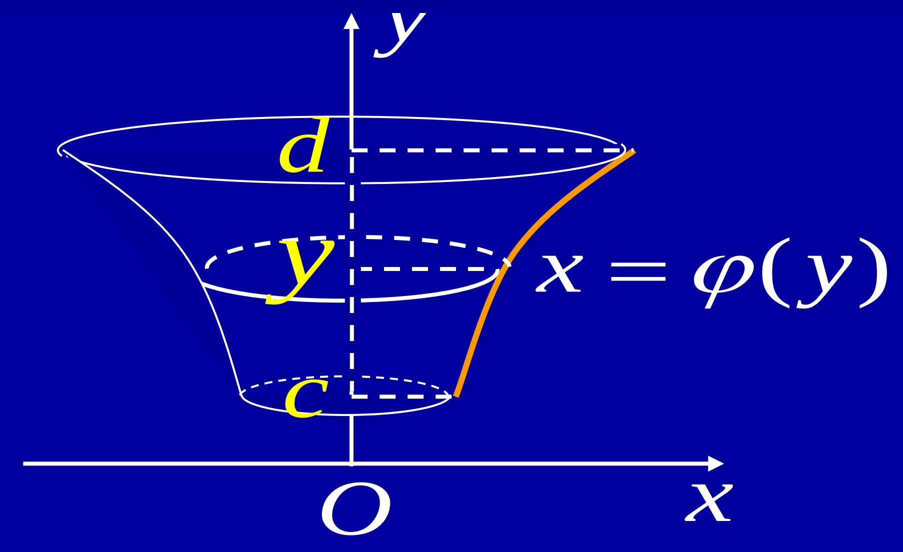


II. 当考虑连续曲线段

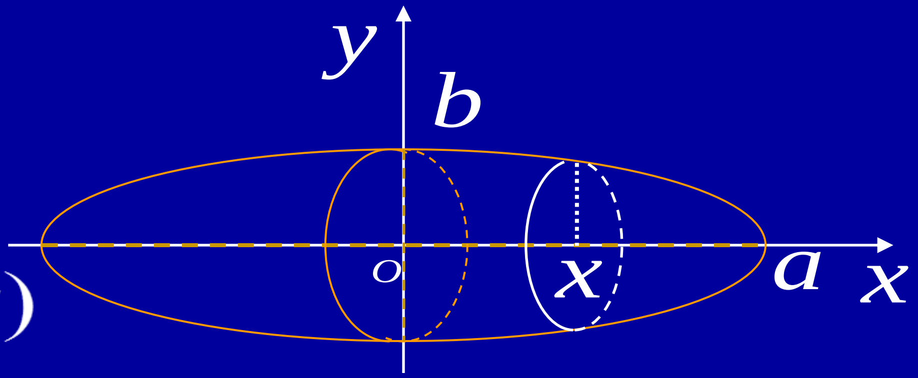
$$x=\varphi(y)\ \ (c\le y\le d)$$

绕 y 轴旋转一周围成的立体体积时, 有

$$V=\int_c^d \pi[\varphi(y)]^2\mathrm{d}y$$



例13. 计算由椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围图形绕 x 轴旋转而转而成的椭球体的体积.



解: 方法1 利用直角坐标方程

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\qquad(-a\le x\le a)$$

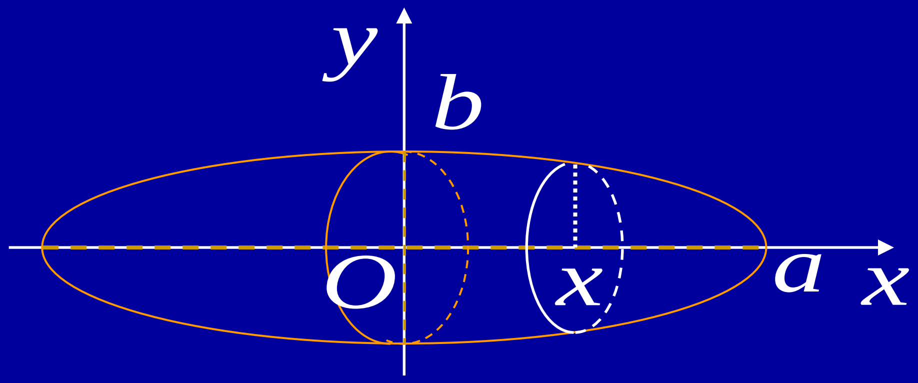
则 $$V=2\int_0^a \pi y^2\,\mathrm{d}x$$ (利用对称性)

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a (a^2-x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

HIGHER EDUCATION PRESS

方法2 利用椭圆参数方程



$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

则 $$V = 2\int_0^a \pi y^2\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} ab^2\sin^3 t\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\pi ab^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1$$

$$= \frac{4}{3}\pi ab^2$$

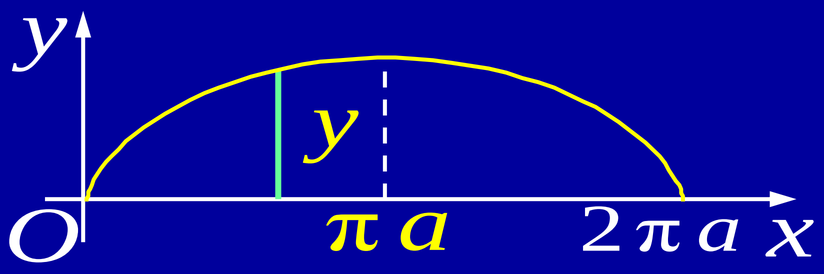
特别当 $b = a$ 时, 就得半径为 a 的球体的体积 $\frac{4}{3}\pi a^3$.

HIGHER EDUCATION PRESS

例14. 计算摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(a > 0)$ 的一拱与 $y = 0$

所围成的图形分别绕 x 轴，y 轴旋转而成的立体体积．

解: 绕 x 轴旋转而成的体积为



利用对称性

$$V_x = \int_0^{2\pi a} \pi y^2 \, dx = 2\int_0^{\pi a} \pi y^2 \, dx$$

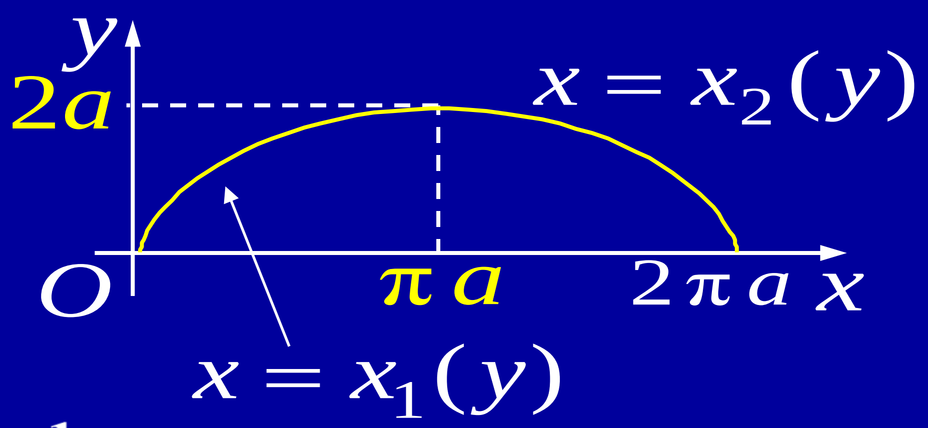
$$= 2\pi \int_0^{\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 \cdot a(1 - \cos t) \, dt$$

$$= 2\pi a^3 \int_0^{\pi} (1 - \cos t)^3 \, dt = 16\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^6 \frac{t}{2} \, dt \quad (令 u = \frac{t}{2})$$

$$= 32\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 u \, du = 32\pi a^3 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= 5\pi^2 a^3$$

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (a > 0)$$



绕 y 轴旋转而成的体积为

$$V_y = \int_0^{2a} \pi x_2^2(y)\,\mathrm{d}y - \int_0^{2a} \pi x_1^2(y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \pi \int_{2\pi}^{\pi} a^2 (t - \sin t)^2 \cdot a \sin t \,\mathrm{d}t$$

注意上下限！

$$- \pi \int_0^{\pi} a^2 (t - \sin t)^2 \cdot a \sin t \,\mathrm{d}t$$

$$= -\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t)^2 \sin t \,\mathrm{d}t$$

$$= 6\pi^3 a^3$$

注

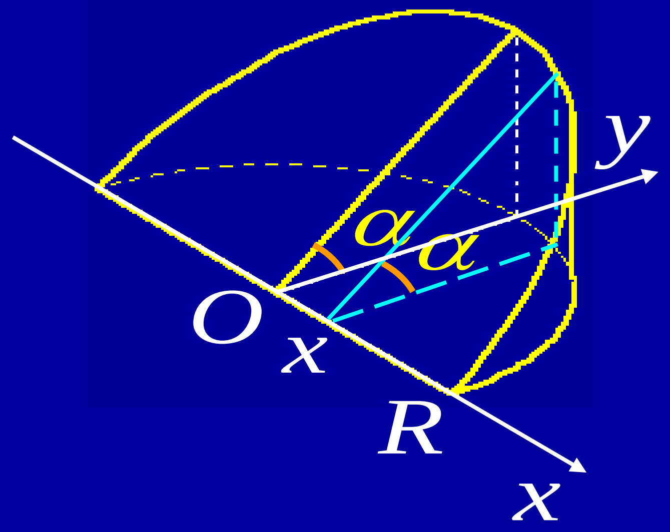
例16. 一平面经过半径为R的圆柱体的底圆中心，并与底面交成α角，计算该平面截圆柱体所得立体的体积.

解: 如图所示取坐标系，则圆的方程为

$$x^2+y^2=R^2$$

垂直于x轴的截面是直角三角形，其面积为

$$A(x)=\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha\quad(-R\le x\le R)$$



利用对称性

$$V=2\int_0^R\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha\,\mathrm{d}x$$

$$=2\tan\alpha\left[R^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^R=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha$$

思考: 可否选择 y 作积分变量？

此时截面面积函数是什么？

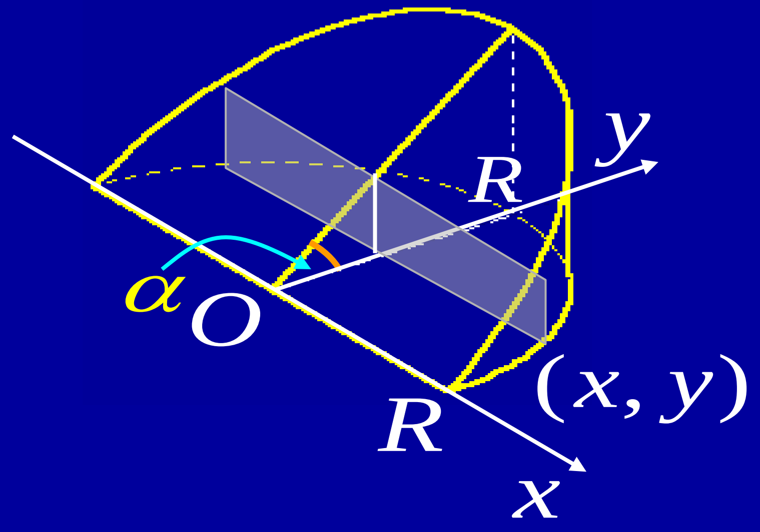
如何用定积分表示体积？

提示:

$$A(y)=2x\cdot y\tan\alpha$$

$$=2\tan\alpha\cdot y\sqrt{R^2-y^2}$$

$$V=2\tan\alpha\cdot\int_0^R y\sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y$$

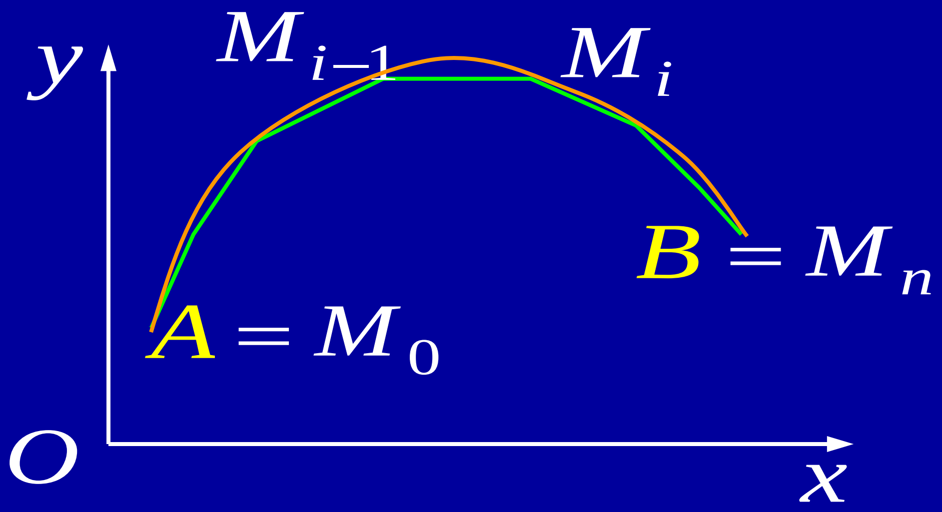


HIGHER EDUCATION PRESS

三、平面曲线的弧长

定义: 若在弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上任意作内接折线，当折线段的最大边长 $\lambda\to 0$ 时，折线的长度趋向于一个确定的极限，则称此极限为曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的弧长，即

$$s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left|M_{i-1}M_i\right|$$



并称此曲线弧为可求长的.

定理: 任意光滑曲线弧都是可求长的. (证明略)

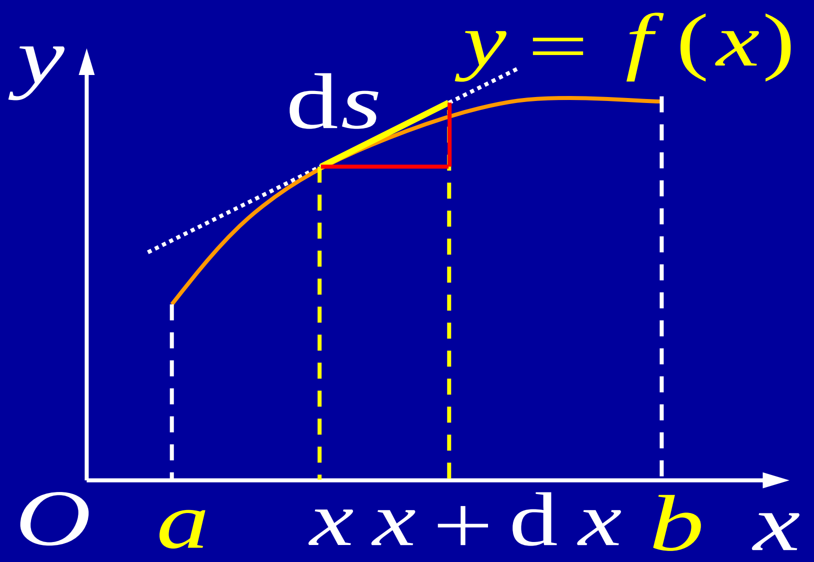
(1) 曲线弧由直角坐标方程给出:

$$y = f(x) \quad (a \le x \le b)$$

弧长元素(弧微分):

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$$

$$= \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$$



因此所求弧长

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

(2) 曲线弧由参数方程给出:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

弧长元素(弧微分) :

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$$

$$= \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

因此所求弧长

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

(3) 曲线弧由极坐标方程给出:

$$r = r(\theta) \quad (\alpha \le \theta \le \beta)$$

令 $x = r(\theta)\cos\theta,\ y = r(\theta)\sin\theta$，则得

弧长元素(弧微分) :

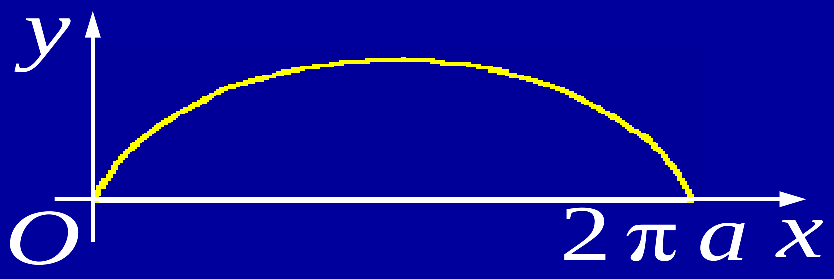
$$\mathrm{d}s = \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

因此所求弧长

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\ \mathrm{d}\theta$$

例12. 计算摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(a > 0)$ 一拱 $(0 \le t \le 2\pi)$ 的弧长 .



解: $\mathrm{d}s = \sqrt{(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2 + (\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2}\,\mathrm{d}t$

$$= \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

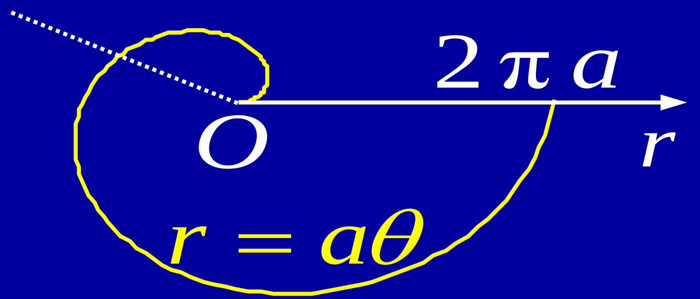
$$= a\sqrt{2(1 - \cos t)}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2a \sin \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$$

$$\therefore \quad s = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8a$$

HIGHER EDUCATION PRESS

例13. 求阿基米德螺线 $r = a\theta \quad (a > 0)$ 相应于 $0 \le \theta \le 2\pi$ 一段的弧长.



解:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \sqrt{a^2\theta^2 + a^2}\;\mathrm{d}\theta$$

$$= a\sqrt{1+\theta^2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$\therefore \quad s = a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\theta^2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= a\left[\frac{\theta}{2}\sqrt{1+\theta^2} + \frac{1}{2}\ln\left|\theta + \sqrt{1+\theta^2}\right|\right]_0^{2\pi}$$

$$= a\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2}\ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})$$

6.2 作业

P286-289

2 (1) ;　3;　5 (2) ;　10;

15 (1), (4) ;　18 ;

22;　25;　30 ;