

第三节

齐次方程

一、齐次方程

*二、可化为齐次方程的方程



一、齐次方程

形如 $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 的方程叫做**齐次方程**.

解法: 令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$,

代入原方程得 $u + x \frac{du}{dx} = \varphi(u)$

分离变量: $\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}$

两边积分, 得 $\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$

积分后再用 $\frac{y}{x}$ 代替 u , 便得原方程的通解.



例1. 解微分方程 $y' = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}$.

解: 令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y' = u + xu'$, 代入原方程得

$$u + xu' = u + \tan u$$

分离变量

$$\frac{\cos u}{\sin u} du = \frac{dx}{x}$$

两边积分

$$\int \frac{\cos u}{\sin u} du = \int \frac{dx}{x}$$

此处 $C \neq 0$

得

$$\ln |\sin u| = \ln |x| + \ln |C|, \text{ 即 } \sin u = Cx$$

故原方程的通解为 $\sin \frac{y}{x} = Cx$ (C 为任意常数)

(当 $C=0$ 时, $y=0$ 也是方程的解)



例2. 解微分方程 $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0$.

解: 方程变形为 $\frac{dy}{dx} = 2\frac{y}{x} - (\frac{y}{x})^2$, 令 $u = \frac{y}{x}$,

则有 $u + xu' = 2u - u^2$

分离变量 $\frac{du}{u^2 - u} = -\frac{dx}{x}$ 即 $(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u})du = -\frac{dx}{x}$

积分得 $\ln \left| \frac{u-1}{u} \right| = -\ln |x| + \ln |C|$, 即 $\frac{x(u-1)}{u} = C$

代回原变量得通解 $x(y-x) = Cy$ (C 为任意常数)

说明: 显然 $x=0, y=0, y=x$ 也是原方程的解,

但在求解过程中丢失了.



例3. 探照灯的聚光镜面是一张旋转曲面, 它的形状由 xOy 坐标面上的一条曲线 L 绕 x 轴旋转而成, 按聚光性能的要求, 在其旋转轴 (x 轴) 上一点 O 处发出的一切光线, 经它反射后都与旋转轴平行. 求 L 的方程.

解: 将光源所在点取作坐标原点, 并设

$$L: y = f(x) \quad (y \geq 0)$$

由光的反射定律: 入射角 = 反射角

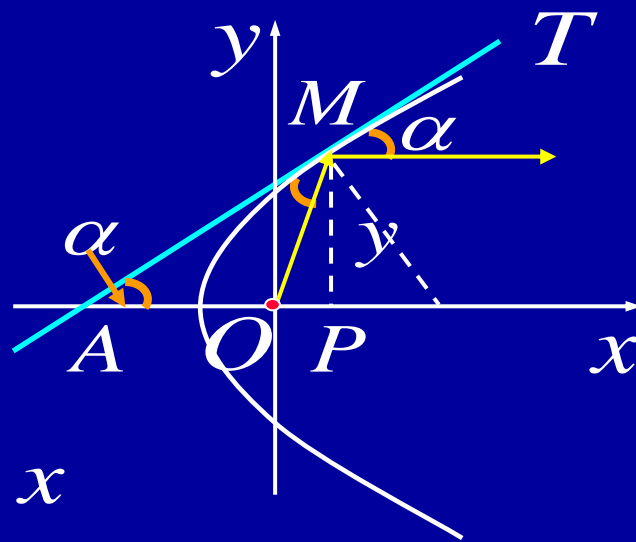
可得 $\angle OMA = \angle OAM = \alpha$

从而 $AO = OM$

$$\text{而 } AO = AP - OP = y \cot \alpha - x = \frac{y}{y'} - x$$

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}$$

于是得微分方程: $\frac{y}{y'} - x = \sqrt{x^2 + y^2}$



于是方程化为

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + \sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \quad (\text{齐次方程})$$

$$\downarrow \text{令 } v = \frac{x}{y}, \text{ 则 } x = yv, \quad \frac{dx}{dy} = v + y \frac{dv}{dy}$$
$$y \frac{dv}{dy} = \sqrt{1 + v^2}$$

积分得 $\ln(v + \sqrt{1 + v^2}) = \ln y - \ln C$

故有 $\frac{y^2}{C^2} - \frac{2yv}{C} = 1$

$$v + \sqrt{1 + v^2} = \frac{y}{C}$$
$$\left(\frac{y}{C} - v\right)^2 = 1 + v^2$$

代入 $yv = x$, 得 $y^2 = 2C\left(x + \frac{C}{2}\right)$ (抛物线)

故反射镜面为旋转抛物面.



7.3 作业

P314

1 (2), (4) ; 2 (2), (3) ;
3 ;

