

第五节

可降阶高阶微分方程

一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

三、 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程



一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

令 $z = y^{(n-1)}$, 则 $\frac{dz}{dx} = y^{(n)} = f(x)$, 因此

$$z = \int f(x) dx + C_1$$

即 $y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1$

同理可得 $y^{(n-2)} = \int [\int f(x) dx + C_1] dx + C_2$

$$= \int [\int f(x) dx] dx + C_1 x + C_2$$

依次通过 n 次积分, 可得含 n 个任意常数的通解.



例1. 求解 $y''' = e^{2x} - \cos x$.

解:
$$y'' = \int (e^{2x} - \cos x) dx + C_1'$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1'$$

$$y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1'x + C_2$$

$$y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + C_1x^2 + C_2x + C_3$$

$$(\text{此处 } C_1 = \frac{1}{2}C_1')$$

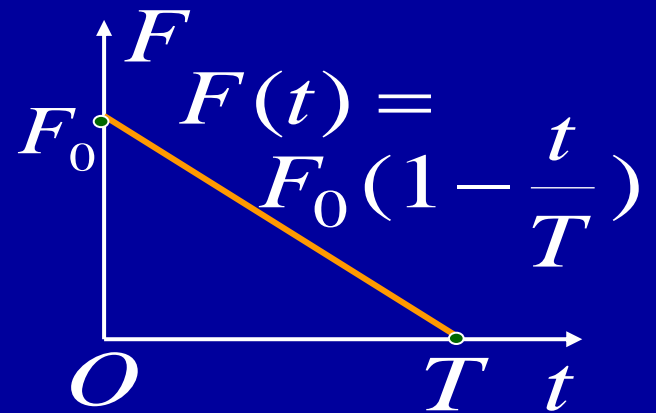


例2. 质量为 m 的质点受力 F 的作用沿 Ox 轴作直线运动, 设力 F 仅是时间 t 的函数: $F = F(t)$. 在开始时刻 $t = 0$ 时 $F(0) = F_0$, 随着时间的增大, 此力 F 均匀地减小, 直到 $t = T$ 时 $F(T) = 0$. 如果开始时质点在原点, 且初速度为0, 求质点的运动规律.

解: 据题意有

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{F_0}{m} \left(1 - \frac{t}{T}\right) \\ x|_{t=0} = 0, \quad \frac{dx}{dt}|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

对方程两边积分, 得



$$\frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{m} \left(t - \frac{t^2}{2T} \right) + C_1$$

利用初始条件 $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0$ 得 $C_1 = 0$, 于是

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{m} \left(t - \frac{t^2}{2T} \right)$$

两边再积分得 $x = \frac{F_0}{m} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6T} \right) + C_2$

再利用 $x|_{t=0} = 0$ 得 $C_2 = 0$, 故所求质点运动规律为

$$x = \frac{F_0}{2m} \left(t^2 - \frac{t^3}{3T} \right) \quad (0 \leq t \leq T)$$



二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

设 $y' = u(x)$, 则 $y'' = u'$, 原方程化为一阶方程

$$u' = f(x, p)$$

设其通解为 $u = \varphi(x, C_1)$

则得 $y' = \varphi(x, C_1)$

再一次积分, 得原方程的通解

$$y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2$$



例3. 求解
$$\begin{cases} (1+x^2)y'' = 2xy' \\ y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = 3 \end{cases}$$

解: 设 $y' = u(x)$, 则 $y'' = u'$, 代入方程得

$$(1+x^2)u' = 2xu \xrightarrow{\text{分离变量}} \frac{du}{u} = \frac{2x dx}{(1+x^2)}$$

积分得 $\ln|u| = \ln(1+x^2) + \ln|C_1|$, 即 $u = C_1(1+x^2)$

利用 $y'|_{x=0} = 3$, 得 $C_1 = 3$, 于是有 $y' = 3(1+x^2)$

两端再积分得 $y = x^3 + 3x + C_2$

利用 $y|_{x=0} = 1$, 得 $C_2 = 1$, 因此所求特解为

$$y = x^3 + 3x + 1$$



例4. 设有一均匀, 柔软的绳索, 两端固定, 绳索仅受重力作用而下垂, 问该绳索的平衡状态是怎样的曲线?

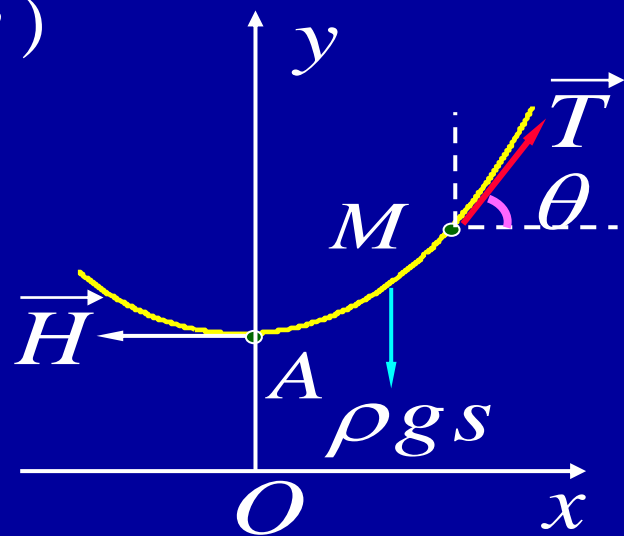
解: 取坐标系如图. 考察最低点 A 到任意点 $M(x, y)$

弧段的受力情况:

A 点受水平张力 \vec{H}

M 点受切向张力 \vec{T}

弧段重力大小 $\rho g s$ (ρ : 密度, s : 弧长)



按静力平衡条件, 有 $T \cos \theta = H, T \sin \theta = \rho g s$

两式相除得 $\tan \theta = \frac{1}{a} s$ (其中 $a = \frac{H}{\rho g}$)

故有 $y' = \frac{1}{a} \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx \longrightarrow y'' = \frac{1}{a} \sqrt{1 + y'^2}$



设 $|OA| = a$, 则得定解问题:

$$\begin{cases} y'' = \frac{1}{a} \sqrt{1 + y'^2} \\ y|_{x=0} = a, \quad y'|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

令 $y' = u(x)$, 则 $y'' = \frac{du}{dx}$, 原方程化为

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{a} dx$$

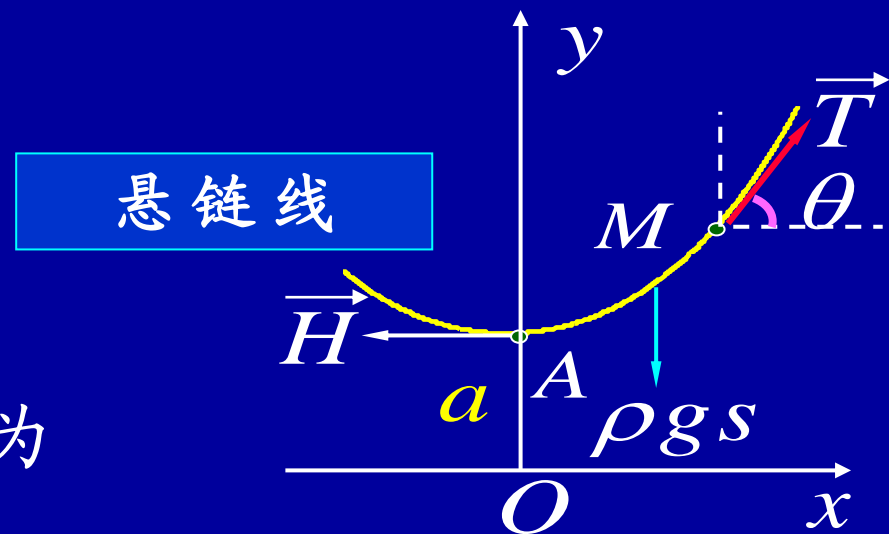
$$\operatorname{Arsh} u = \ln(u + \sqrt{1+u^2})$$

两端积分得 $\operatorname{Arsh} u = \frac{x}{a} + C_1$, 由 $y'|_{x=0} = 0$ 得 $C_1 = 0$,

则有 $y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a}$

两端积分得 $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} + C_2$, 由 $y|_{x=0} = a$, 得 $C_2 = 0$

故所求绳索的形状为 $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$



三、 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

令 $y' = u(y)$, 则 $y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = u \frac{du}{dy}$

故方程化为 $u \frac{du}{dy} = f(y, u)$

设其通解为 $u = \varphi(y, C_1)$, 即得

$$y' = \varphi(y, C_1)$$

分离变量后积分, 得原方程的通解

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$$



例5. 求解 $yy'' - y'^2 = 0$.

解: 设 $y' = p(y)$, 则 $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$

代入方程得 $yp \frac{dp}{dy} - p^2 = 0$, 即 $\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$

两端积分得 $\ln|p| = \ln|y| + \ln|C_1|$,

即 $p = C_1 y$,

$\therefore y' = C_1 y$ (一阶线性齐次方程)

故所求通解为 $y = C_2 e^{C_1 x}$



例6. 解初值问题 $\begin{cases} y'' - e^{2y} = 0 \\ y|_{x=0} = 0, \quad y'|_{x=0} = 1 \end{cases}$

解: 令 $y' = p(y)$, 则 $y'' = p \frac{dp}{dy}$, 代入方程得

$$p \, dp = e^{2y} \, dy$$

积分得 $\frac{1}{2} p^2 = \frac{1}{2} e^{2y} + C_1$

利用初始条件, 得 $C_1 = 0$, 根据 $p|_{y=0} = y'|_{x=0} = 1 > 0$, 得

$$\frac{dy}{dx} = p = e^y$$

积分得 $-e^{-y} = x + C_2$, 再由 $y|_{x=0} = 0$, 得 $C_2 = -1$

故所求特解为 $1 - e^{-y} = x$

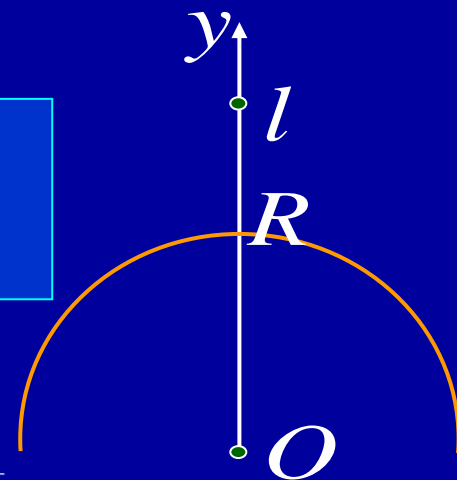


例7. 一个离地面很高的物体, 受地球引力的作用由静止开始落向地面, 求它落到地面时的速度和所需时间(不计空气阻力).

解: 如图所示选取坐标系. 则有定解问题:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{k m M}{y^2} \\ y|_{t=0} = l, \quad y'|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

M : 地球质量
 m : 物体质量



设 $v(y) = \frac{dy}{dt}$, 则 $\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = v \frac{dv}{dy}$

代入方程得 $v dv = -\frac{kM}{y^2} dy$, 积分得 $v^2 = \frac{2kM}{y} + C_1$



利用 $v|_{t=0} = y'|_{t=0} = 0$, $y|_{t=0} = l$, 得 $C_1 = -\frac{2kM}{l}$

$$v^2 = 2kM \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{l} \right], \text{ 即 } v = -\sqrt{\frac{2kM}{l}} \sqrt{\frac{l-y}{y}}$$

注意“-”号

$$\because v = \frac{dy}{dt}, \therefore dt = -\sqrt{\frac{l}{2kM}} \sqrt{\frac{y}{l-y}} dy$$

$$\text{两端积分得 } t = \sqrt{\frac{l}{2kM}} \left[\sqrt{ly - y^2} + l \arccos \sqrt{\frac{y}{l}} \right] + C_2$$

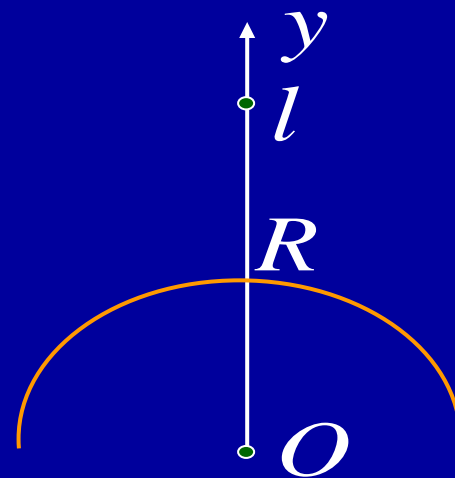
利用 $y|_{t=0} = l$, 得 $C_2 = 0$, 因此有

$$t = \sqrt{\frac{l}{2kM}} \left[\sqrt{ly - y^2} + l \arccos \sqrt{\frac{y}{l}} \right]$$



$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{k m M}{y^2}, \quad v = -\sqrt{\frac{2kM}{l}} \sqrt{\frac{l-y}{y}}$$

$$t = \sqrt{\frac{l}{2kM}} \left[\sqrt{ly - y^2} + l \arccos \sqrt{\frac{y}{l}} \right]$$



由于 $y = R$ 时 $y'' = -g$, 由原方程可得 $k = \frac{g R^2}{M}$

因此落到地面 ($y = R$) 时的速度和所需时间分别为

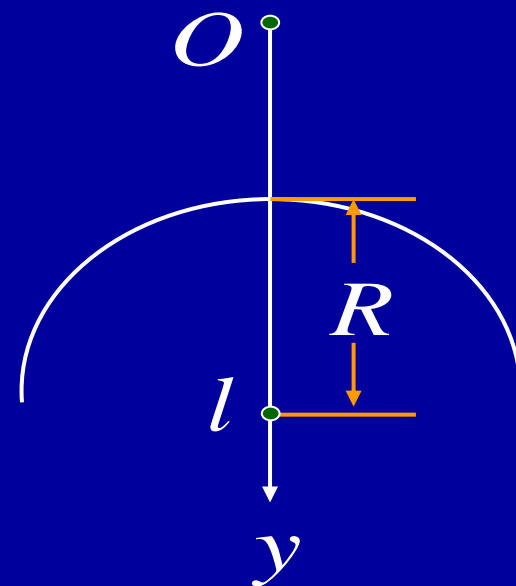
$$v|_{y=R} = -\sqrt{\frac{2gR(l-R)}{l}}$$

$$t|_{y=R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{l}{2g}} \left[\sqrt{lR - R^2} + l \arccos \sqrt{\frac{R}{l}} \right]$$



说明: 若此例改为如图所示的坐标系, 则定解问题为

$$\begin{cases} m \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{k m M}{(l-y)^2} \\ y|_{t=0} = 0, \quad y'|_{t=0} = 0 \end{cases}$$



令 $v = \frac{dy}{dt}$, 解方程可得

$$v^2 = 2kM \left(\frac{1}{l-y} - \frac{1}{l} \right)$$

问: 此时开方根号前应取什么符号? 说明道理.



7.5 作业

P329

1 (5), (7); 2 (3), (6);

3;



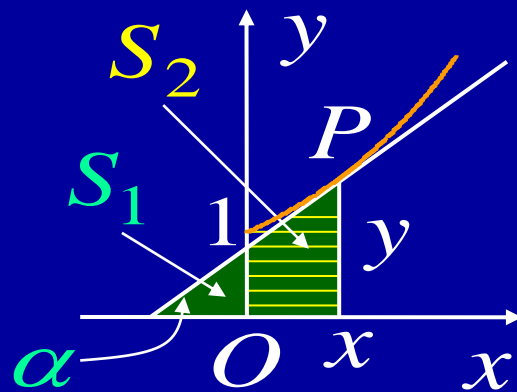
例8. 设函数 $y(x)$ ($x \geq 0$) 二阶可导, 且 $y'(x) > 0$, $y(0) = 1$, 过曲线 $y = y(x)$ 上任一点 $P(x, y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线, 上述两直线与 x 轴围成的三角形面积记为 S_1 , 区间 $[0, x]$ 上以 $y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积 记为 S_2 , 且 $2S_1 - S_2 \equiv 1$, 求 $y = y(x)$ 满足的方程. (1999 考研)

解: 因为 $y(0) = 1$, $y'(x) > 0$, 所以 $y(x) > 0$.

设曲线 $y = y(x)$ 在点 $P(x, y)$ 处的切线倾角为 α , 于是

$$S_1 = \frac{1}{2} y^2 \cot \alpha = \frac{y^2}{2 y'}$$

$$S_2 = \int_0^x y(t) dt$$



利用 $2S_1 - S_2 = 1$, 得 $\frac{y^2}{y'} - \int_0^x y(t) dt = 1$

两边对 x 求导, 得 $yy'' = (y')^2$

定解条件为 $y(0) = 1, y'(0) = 1$

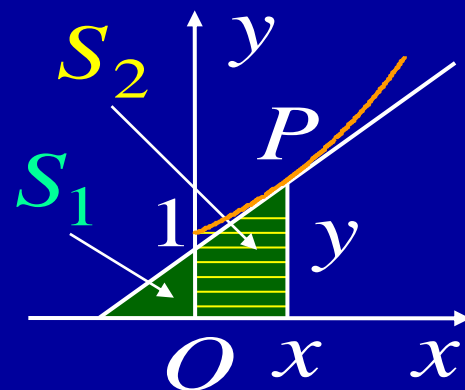
令 $y' = p(y)$, 则 $y'' = p \frac{dp}{dy}$, 方程化为

$$yp \frac{dp}{dy} = p^2 \longrightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$$

解得 $p = C_1 y$, 利用定解条件得 $C_1 = 1$, 再解 $y' = y$,

得 $y = C_2 e^x$, 再利用 $y(0) = 1$ 得 $C_2 = 1$,

故所求曲线方程为 $y = e^x$



$$S_1 = \frac{y^2}{2y'}$$
$$S_2 = \int_0^x y(t) dt$$



内容小结

可降阶微分方程的解法 —— 降阶法

1. $y^{(n)} = f(x)$

逐次积分

2. $y'' = f(x, y')$

令 $y' = p(x)$, 则 $y'' = \frac{dp}{dx}$

3. $y'' = f(y, y')$

令 $y' = p(y)$, 则 $y'' = p \frac{dp}{dy}$



思考与练习

1. 方程 $y'' = f(y')$ 如何代换求解？

答: 令 $y' = p(x)$ 或 $y' = p(y)$ 均可.

一般说, 用前者方便些.

有时用后者方便. 例如, $y'' = e^{-(y')^2}$

2. 解二阶可降阶微分方程初值问题需注意哪些问题？

答: (1) 一般情况, 边解边定常数计算简便.

(2) 遇到开平方时, 要根据题意确定正负号.

例6

例7



备用题

设物体 A 从点 $(0, 1)$ 出发, 以大小为常数 v

的速度沿 y 轴正向运动,

物体 B 从 $(-1, 0)$ 出发,

速度

大小为 $2v$, 方向指向 A ,

试建立物体 B 的运动轨迹应满

足的微分方程及初始条件.

提示: 设 t 时刻 B 位于 (x, y) , 如图所示, 则有

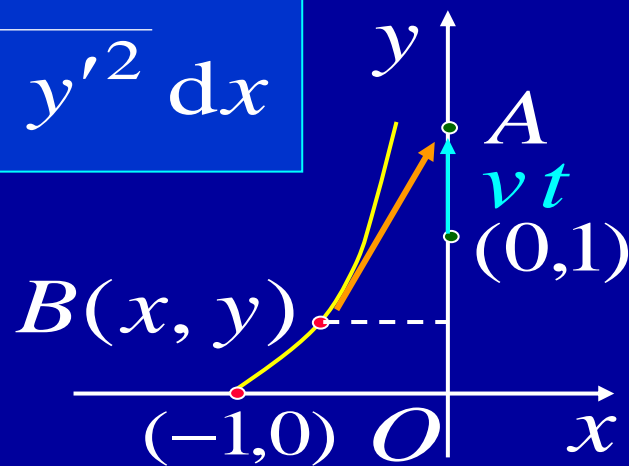
$$y' = \frac{1 + vt - y}{-x}$$

$$s = \int_{-1}^x \sqrt{1 + y'^2} dx$$

去分母后两边对 x 求导, 得

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} = -v \frac{dt}{dx} \quad ①$$

又由于 $2v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-1}^x \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{1 + y'^2} \frac{dx}{dt}$



$$\therefore \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2v} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

代入 ① 式得所求微分方程:

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + y'^2} = 0$$

即
$$xy'' + \frac{1}{2} \sqrt{1 + y'^2} = 0$$

其初始条件为

$$y|_{x=-1} = 0, \quad y'|_{x=-1} = 1$$

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} = -v \frac{dt}{dx} \quad \text{①}$$

