

## 第二节

# 数量积 向量积 \*混合积

一、两向量的数量积

二、两向量的向量积

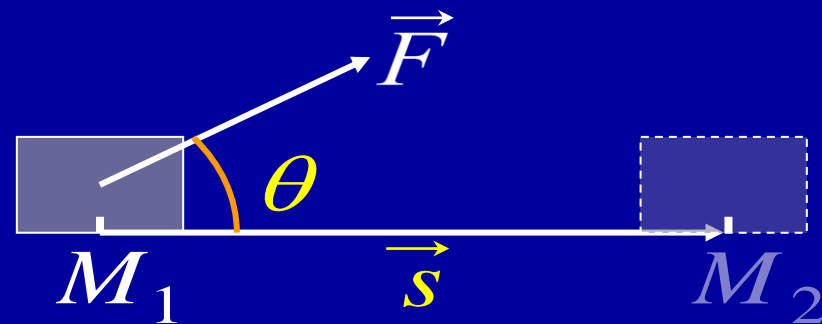
\*三、向量的混合积



## 一、两向量的数量积

**引例.** 设一物体在常力  $\vec{F}$  作用下, 沿与力夹角为  $\theta$  的直线移动, 位移为  $\vec{s}$ , 则力  $\vec{F}$  所做的功为

$$W = |\vec{F}| |\vec{s}| \cos \theta$$



**1. 定义** 设向量  $\vec{a}, \vec{b}$  的夹角为  $\theta$ , 称

$$|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \stackrel{\text{记作}}{=} \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

为  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的 **数量积** (内积, 点积).



当  $\vec{a} \neq \vec{0}$  时,  $\vec{b}$  在  $\vec{a}$  上的投影为

$$|\vec{b}| \cos \theta \xrightarrow{\text{记作}} \text{Prj}_{\vec{a}} \vec{b}$$

故  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \text{Prj}_{\vec{a}} \vec{b}$

同理, 当  $\vec{b} \neq \vec{0}$  时,

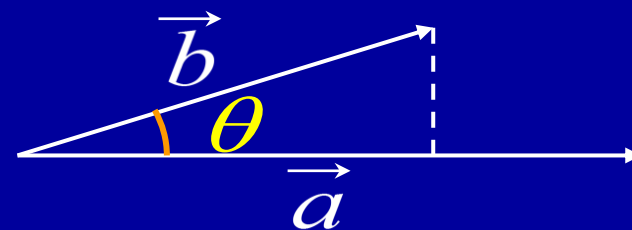
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a}$$

## 2. 性质

(1)  $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

(2)  $\vec{a}, \vec{b}$  为两个非零向量, 则有

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$$



$$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$$

$$\text{则 } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$



$$(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$



### 3. 运算律

(1) 交换律  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

(2) 分配律  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

(3) 结合律 ( $\lambda, \mu$  为实数)

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$(\lambda \vec{a}) \cdot (\mu \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \cdot (\mu \vec{b})) = \lambda \mu (\vec{a} \cdot \vec{b})$$



**例1.** 证明三角形余弦定理

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

**证:** 如图, 设

$$\overrightarrow{CB} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{CA} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{AB} = \vec{c}$$

则

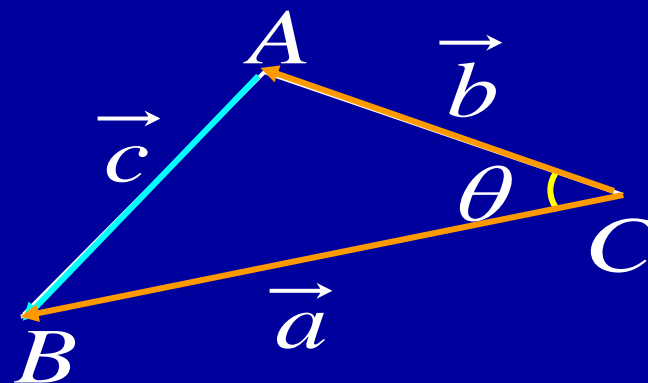
$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

$$|\vec{c}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos \theta$$

$$\downarrow a = |\vec{a}|, b = |\vec{b}|, c = |\vec{c}|$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$



#### 4. 数量积的坐标表示

设  $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ ,  $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ , 则

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k})$$

$$\left| \begin{array}{l} \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \\ \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \end{array} \right.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

两向量的夹角公式

当  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  为非零向量时, 由于  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ , 得

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

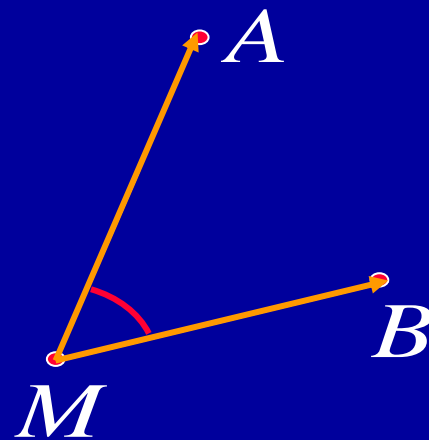


**例2.** 已知三点  $M(1,1,1)$ ,  $A(2,2,1)$ ,  $B(2,1,2)$ ,  
求  $\angle AMB$ .

**解:**  $\overrightarrow{MA} = (1, 1, 0)$ ,  $\overrightarrow{MB} = (1, 0, 1)$

$$\begin{aligned}\text{则 } \cos \angle AMB &= \frac{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}| |\overrightarrow{MB}|} \\ &= \frac{1+0+0}{\sqrt{2} \sqrt{2}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\text{故 } \angle AMB = \frac{\pi}{3}$$



## 二、两向量的向量积

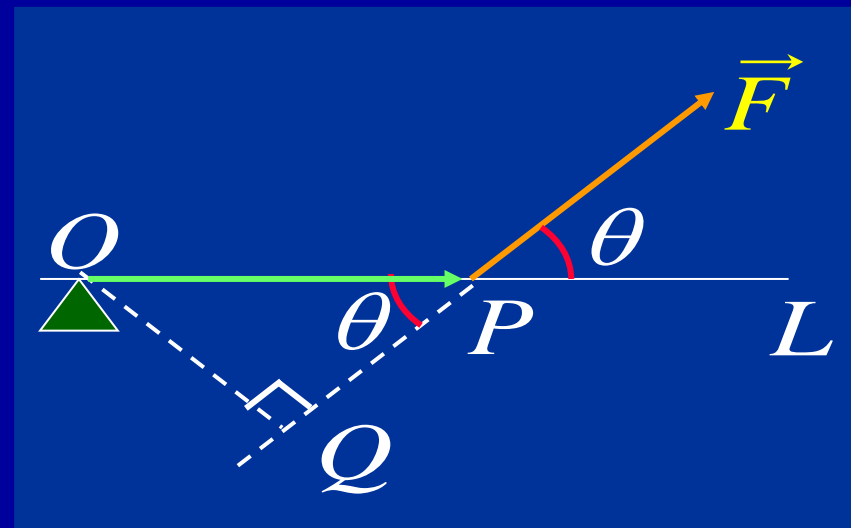
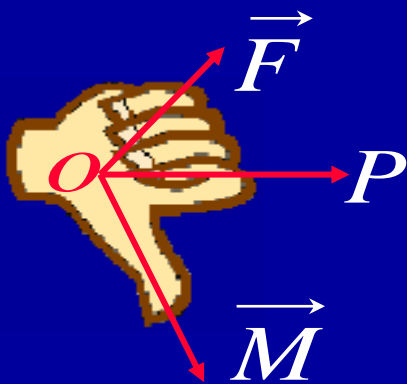
**引例.** 设  $O$  为杠杆  $L$  的支点，有一个与杠杆夹角为  $\theta$  的力  $\vec{F}$  作用在杠杆的  $P$  点上，则力  $\vec{F}$  作用在杠杆上的力矩是一个向量  $\vec{M}$ ：

$$|\vec{M}| = |OQ| |\vec{F}| = |\vec{OP}| |\vec{F}| \sin \theta$$

$\vec{OP} \Rightarrow \vec{F} \Rightarrow \vec{M}$  符合右手规则

$$\vec{M} \perp \vec{OP}$$

$$\vec{M} \perp \vec{F}$$



$$|OQ| = |\vec{OP}| \sin \theta$$





## 1. 定义

设  $\vec{a}, \vec{b}$  的夹角为  $\theta$ , 定义

$$\text{向量 } \vec{c} \begin{cases} \text{方向: } \vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b} \text{ 且符合右手规则} \\ \text{模: } |\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \end{cases}$$

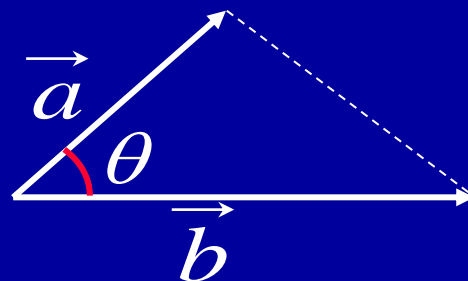
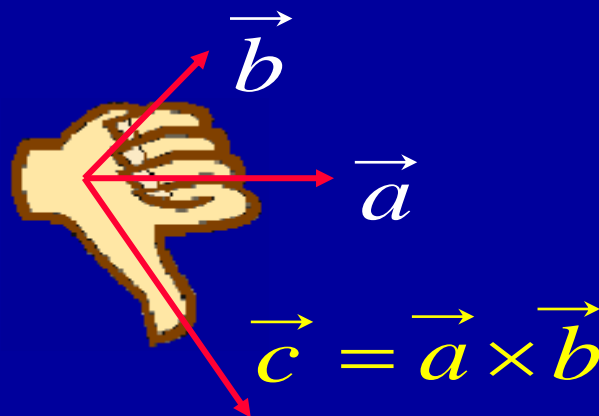
称  $\vec{c}$  为向量  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的向量积, 记作

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad (\text{外积、叉积})$$

引例中的力矩  $\vec{M} = \vec{OP} \times \vec{F}$

思考: 右图三角形面积

$$S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$



## 2. 性质

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

$$(1) \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$$(2) \vec{a}, \vec{b} \text{ 为非零向量, 则 } \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a} \parallel \vec{b}$$

**证明:** 当  $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$  时,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 0$$

$$\iff \sin \theta = 0, \text{ 即 } \theta = 0 \text{ 或 } \pi \iff \vec{a} \parallel \vec{b}$$

## 3. 运算律

$$(1) \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$(2) \text{ 分配律 } (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

$$(3) \text{ 结合律 } (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$$



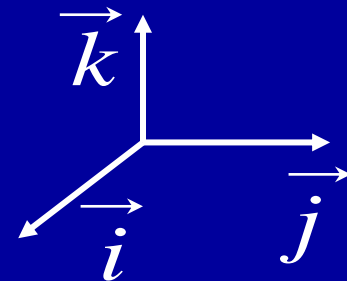
#### 4. 向量积的坐标表示式

设  $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ ,  $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ , 则

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k})$$

$$\begin{aligned} &= \cancel{a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i})} + \underline{a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j})} + \underline{a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k})} \\ &\quad + \underline{a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i})} + \cancel{a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j})} + \underline{a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k})} \\ &\quad + \underline{a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i})} + \underline{a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j})} + \cancel{a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} \\ &\quad + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} \end{aligned}$$



## 向量积的行列式算法

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \\ \vec{b} &= b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} \end{aligned}$$

$$= \left( \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right)$$

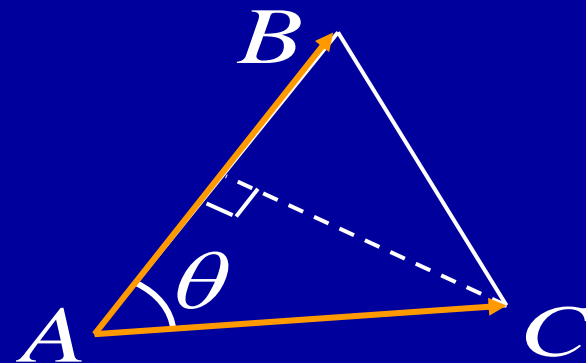
(行列式计算见上册 P363 ~ P366)



**例4.** 已知三点  $A(1,2,3)$ ,  $B(3,4,5)$ ,  $C(2,4,7)$ ,  
求三角形  $ABC$  的面积.

**解:** 如图所示,

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \\ &= \frac{1}{2} \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{array} \right| = \frac{1}{2} |(4, -6, 2)| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{14} \end{aligned}$$



## 8.2 作业

P23

2, 3, 9, 10

