

## 第三节

## 平面及其方程

- 一、曲面方程和空间曲线方程的概念
- 二、平面的点法式方程
- 三、平面的一般方程
- 四、两平面的夹角



# 一、曲面方程和空间曲线方程的概念

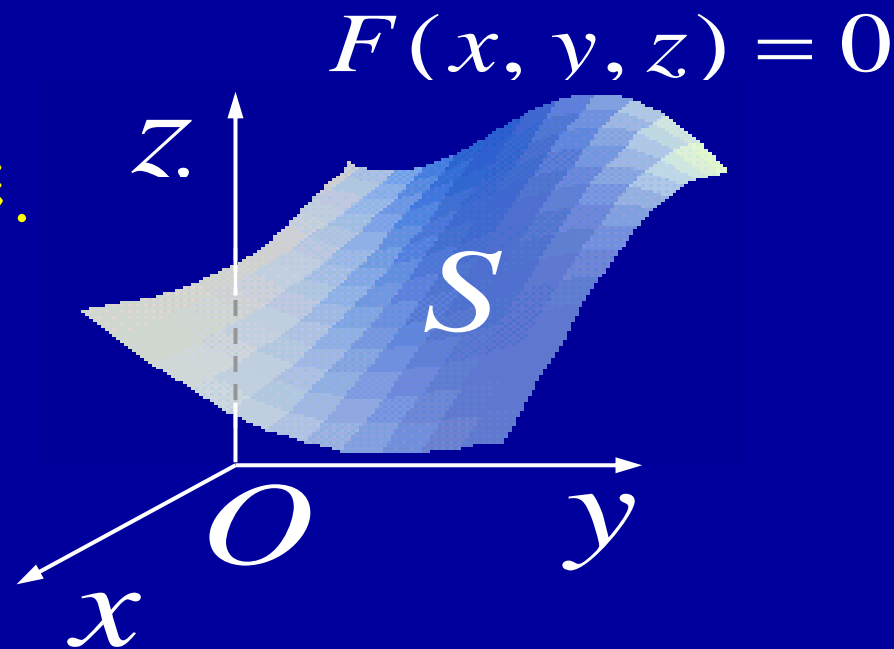
**定义1.** 如果曲面  $S$  与方程  $F(x, y, z) = 0$  有下述关系:

(1) 曲面  $S$  上的任意点的坐标都满足此方程

(2) 不在曲面  $S$  上的点的坐标不满足此方程

则  $F(x, y, z) = 0$  叫做曲面  $S$  的**方程**,

曲面  $S$  叫做方程  $F(x, y, z) = 0$  的**图形**.

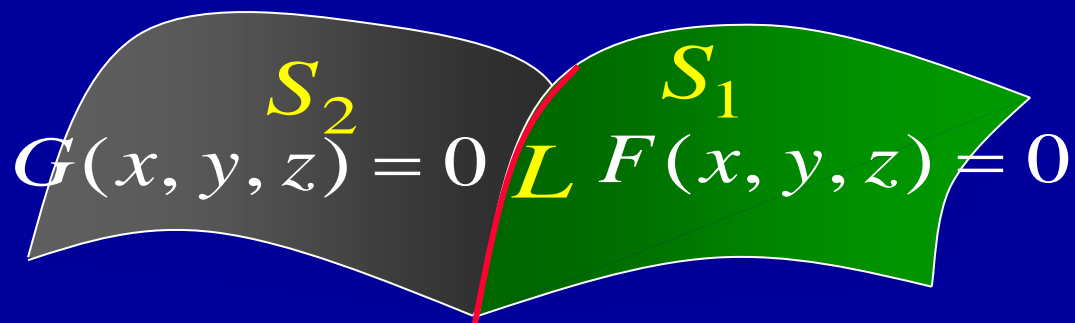


# 一、曲面方程和空间曲线方程的概念

空间曲线可视为两曲面的交线,

其一般方程为方程组

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$



## 二、平面的点法式方程

设一平面通过已知点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  且垂直于非零向量  $\vec{n} = (A, B, C)$ , 求该平面  $\Pi$  的方程.

任取点  $M(x, y, z) \in \Pi$ , 则有

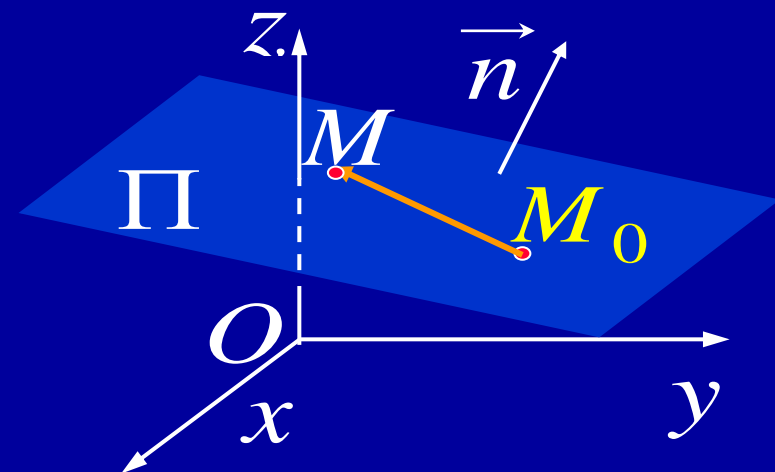
$$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$$

故 
$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\downarrow \overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad ①$$

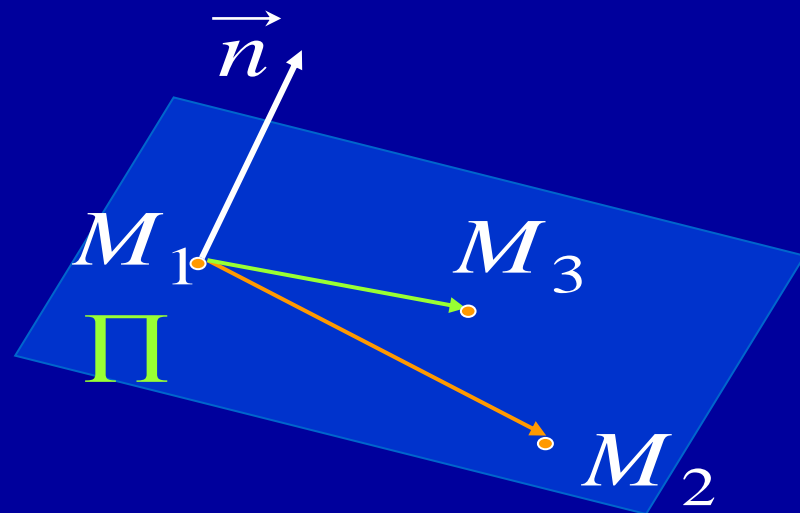
称①式为平面  $\Pi$  的点法式方程, 称  $\vec{n}$  为平面  $\Pi$  的法线向量



**例1.** 求过三点  $M_1(2, -1, 4)$ ,  $M_2(-1, 3, -2)$ ,  $M_3(0, 2, 3)$  的平面  $\Pi$  的方程.

**解:** 取该平面  $\Pi$  的法向量为

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (14, 9, -1)\end{aligned}$$



又  $M_1 \in \Pi$ , 利用点法式得平面  $\Pi$  的方程

$$14(x-2) + 9(y+1) - (z-4) = 0$$

即  $14x + 9y - z - 15 = 0$



一般情况：

过三点  $M_k(x_k, y_k, z_k)$  ( $k = 1, 2, 3$ ) 的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

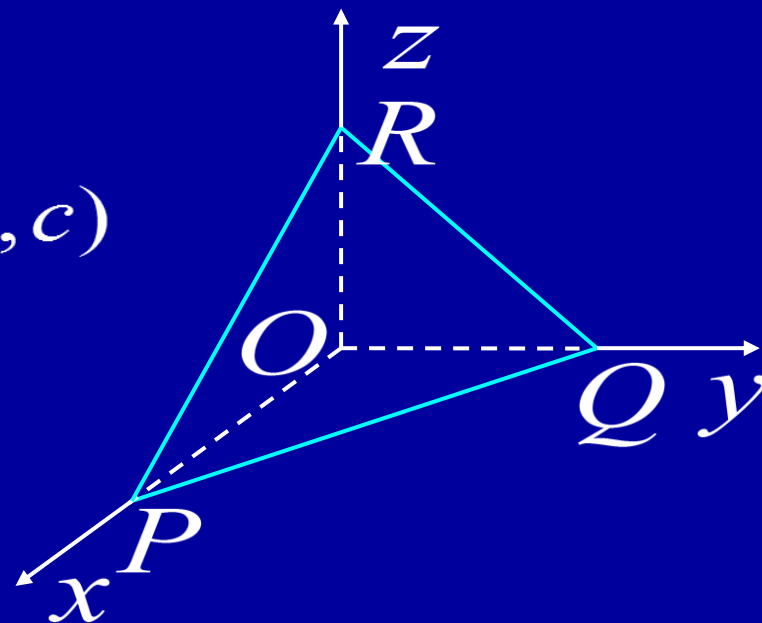
特别，当平面与三坐标轴的交点分别为

$$P(a, 0, 0), Q(0, b, 0), R(0, 0, c)$$

时，平面方程为

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (a, b, c \neq 0)$$

此式称为平面的截距式方程.



### 三、平面的一般方程

设有三元一次方程

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0) \quad \textcircled{2}$$

任取一组满足上述方程的数  $x_0, y_0, z_0$ , 则

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

以上两式相减, 得平面的点法式方程

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

显然方程②与此点法式方程等价, 因此方程②的图形是

法向量为  $\vec{n} = (A, B, C)$  的平面, 此方程称为**平面的一般方程**.



$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$$

### 特殊情形

- 当  $D = 0$  时,  $Ax + By + Cz = 0$  表示 **通过原点** 的平面;
- 当  $A = 0$  时,  $By + Cz + D = 0$  的法向量  
 $\vec{n} = (0, B, C) \perp \vec{i}$ , 平面平行于  $x$  轴;
- $Ax + Cz + D = 0$  表示 **平行于  $y$  轴** 的平面;
- $Ax + By + D = 0$  表示 **平行于  $z$  轴** 的平面;
- $Cz + D = 0$  表示 平行于  $xOy$  面 的平面;
- $Ax + D = 0$  表示 平行于  $yOz$  面 的平面;
- $By + D = 0$  表示 平行于  $zOx$  面 的平面.





$$Ax + By + Cz + D = 0$$

**例2.** 求通过  $x$  轴和点  $(4, -3, -1)$  的平面方程.

**解:** 因平面通过  $x$  轴, 故  $A = D = 0$

设所求平面方程为

$$By + Cz = 0$$

代入已知点  $(4, -3, -1)$  得  $C = -3B$

化简, 得所求平面方程

$$y - 3z = 0$$



## 四、两平面的夹角

两平面法向量的夹角 (锐角或直角) 称为两平面的夹角.

设平面  $\Pi_1$  的法向量为  $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$

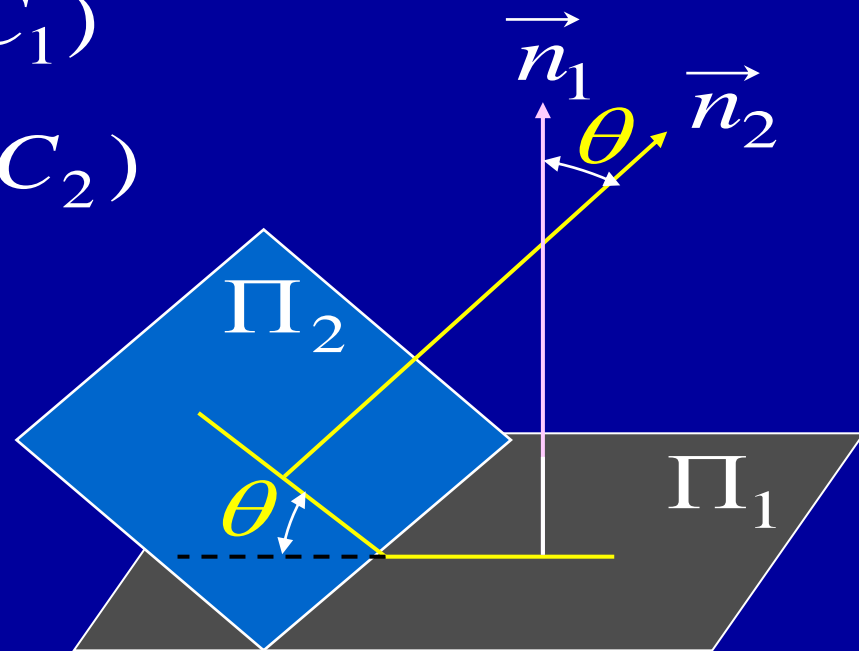
平面  $\Pi_2$  的法向量为  $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$

则两平面夹角  $\theta$  的余弦为

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

即

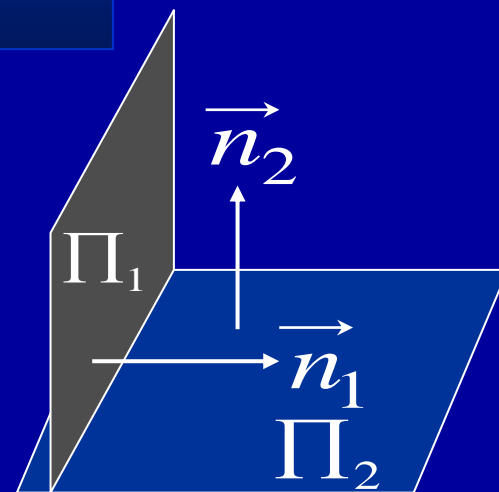
$$\cos \theta = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$



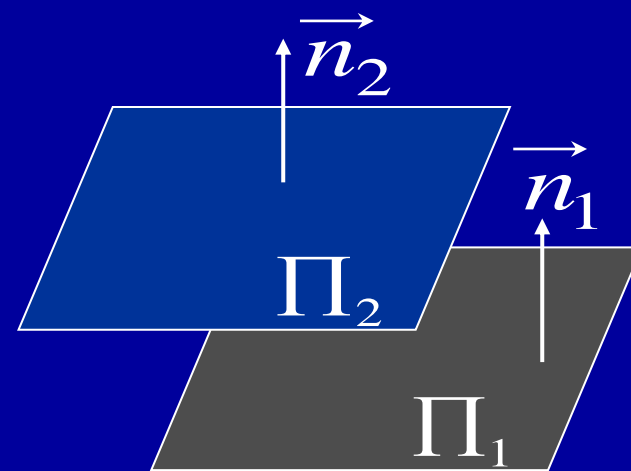
$$\begin{aligned} \Pi_1 : \vec{n}_1 &= (A_1, B_1, C_1) \\ \Pi_2 : \vec{n}_2 &= (A_2, B_2, C_2) \end{aligned} \quad \cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

特别有下列结论:

$$\begin{aligned} (1) \quad \Pi_1 \perp \Pi_2 &\iff \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \\ &\iff A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (2) \quad \Pi_1 // \Pi_2 &\iff \vec{n}_1 // \vec{n}_2 \\ &\iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \end{aligned}$$



**例4.** 一平面通过两点  $M_1(1, 1, 1)$  和  $M_2(0, 1, -1)$ ,  
且垂直于平面  $\Pi: x + y + z = 0$ , 求其方程.

**解:** 设所求平面的法向量为  $\vec{n} = (A, B, C)$ , 则所求平面  
方程为  $A(x-1) + B(y-1) + C(z-1) = 0$

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{M_1M_2} \implies -A + 0 \cdot B - 2C = 0, \text{ 即 } A = -2C$$

$$\vec{n} \perp \Pi \text{ 的法向量} \implies A + B + C = 0, \text{ 故}$$

$$B = -(A + C) = C$$

$$\text{因此有 } -2\cancel{C}(x-1) + \cancel{C}(y-1) + \cancel{C}(z-1) = 0 \quad (C \neq 0)$$

$$\text{约去 } C, \text{ 得 } -2(x-1) + (y-1) + (z-1) = 0$$

即

$$2x - y - z = 0$$



**例5.** 设  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  是平面  $Ax + By + Cz + D = 0$  外一点, 求  $P_0$  到平面的距离  $d$ .

**解:** 设平面法向量为  $\vec{n} = (A, B, C)$ , 在平面上取一点  $P_1(x_1, y_1, z_1)$ , 则  $P_0$  到平面的距离为

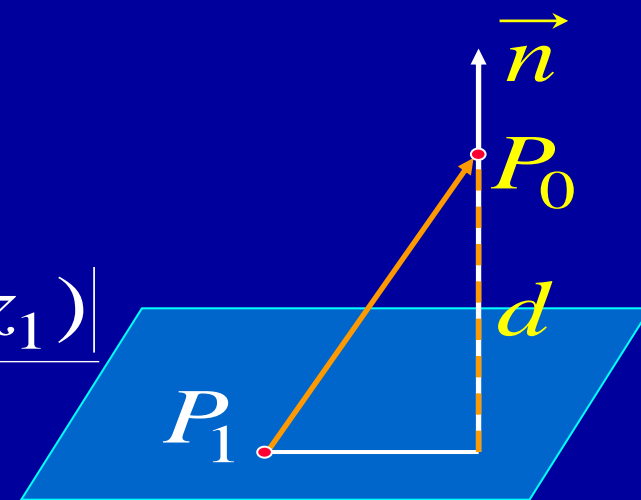
$$d = \left| \text{Prj}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_1 P_0} \right| = \frac{|\overrightarrow{P_1 P_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

$$= \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\downarrow Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

(点到平面的距离公式)



## 8.3 作业

P29~30

2, 5, 6, 9



## 内容小结

### 1. 平面基本方程:

一般式  $Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$

点法式  $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

截距式  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (abc \neq 0)$

三点式 
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$



## 2. 平面与平面之间的关系

平面  $\Pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ,  $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$

平面  $\Pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ ,  $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$

垂直:  $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \iff A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

平行:  $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0} \iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

夹角公式:  $\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$





## 备用题

求过点  $(1, 1, 1)$  且垂直于二平面  $x - y + z = 7$  和  $3x + 2y - 12z + 5 = 0$  的平面方程.

**解:** 已知二平面的法向量为

$$\vec{n}_1 = (1, -1, 1), \quad \vec{n}_2 = (3, 2, -12)$$

取所求平面的法向量

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (10, 15, 5)$$

则所求平面方程为

$$10(x - 1) + 15(y - 1) + 5(z - 1) = 0$$

化简得  $2x + 3y + z - 6 = 0$



**例6.** 求内切于平面  $x + y + z = 1$  与三个坐标面所构成四面体的球面方程.

**解:** 设球心为  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , 则它位于第一卦限, 且

$$\frac{|x_0 + y_0 + z_0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = x_0 = y_0 = z_0 = R(\text{半径})$$

$$\because x_0 + y_0 + z_0 \leq 1, \therefore 1 - 3x_0 = \sqrt{3}x_0$$

$$\text{故 } R = y_0 = z_0 = x_0 = \frac{1}{3 + \sqrt{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}$$

因此所求球面方程为

$$\left(x - \frac{3 - \sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{3 - \sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(z - \frac{3 - \sqrt{3}}{6}\right)^2 = \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{6}\right)^2$$

