

第四节

空间直线及其方程

一、空间直线方程

二、线面间的位置关系



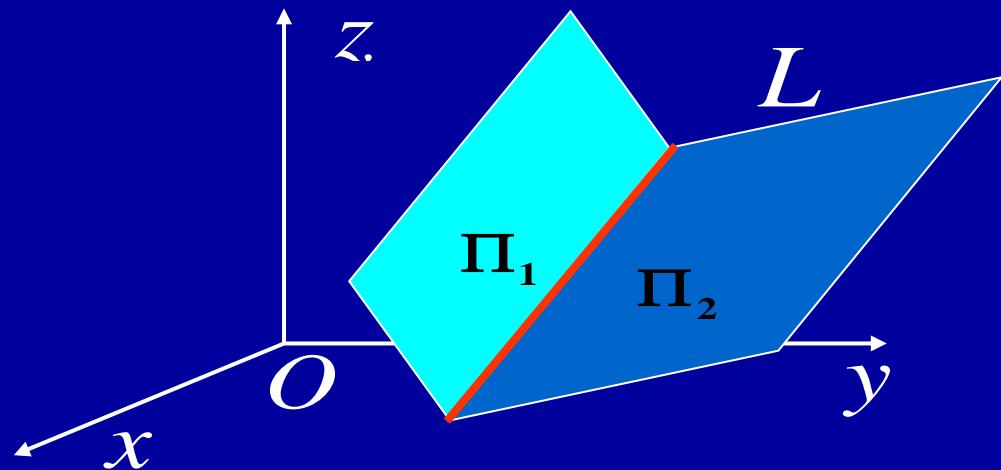
一、空间直线方程

1. 一般式方程

空间直线可视为两平面交线，因此其一般式方程

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

(不唯一)



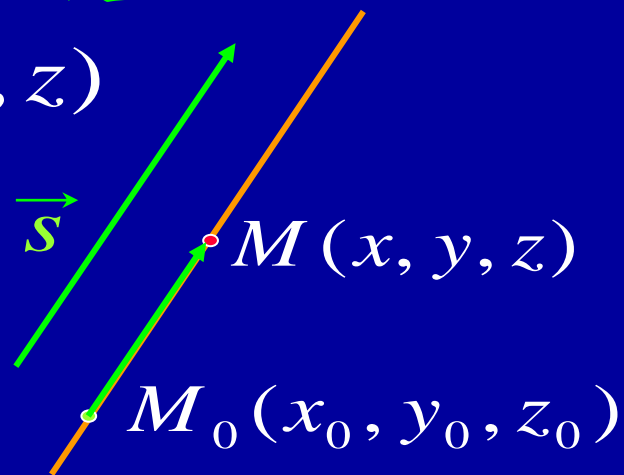
2. 对称式方程

已知直线上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和它的方向向量

$\vec{s} = (m, n, p)$, 设直线上的动点为 $M(x, y, z)$

则 $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$

故有
$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

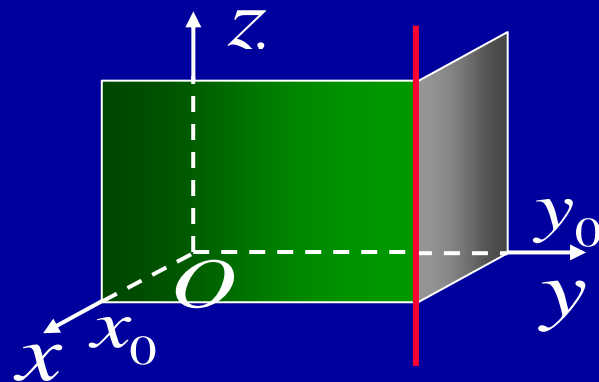


此式称为直线的**对称式方程**(也称为**点向式方程**)

说明: 某些分母为零时, 其分子也理解为零.

例如, 当 $m = n = 0, p \neq 0$ 时, 直线方程为

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$



3. 参数式方程

$$\text{设 } \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} = t$$

得参数式方程：

$$\begin{cases} x = x_0 + m t \\ y = y_0 + n t \\ z = z_0 + p t \end{cases}$$



例1. 用对称式及参数式表示直线

$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

解: 先在直线上找一点.

$$\text{令 } x = 1, \text{ 解方程组 } \begin{cases} y + z = -2 \\ y - 3z = 6 \end{cases}, \text{ 得 } y = 0, z = -2$$

故 $(1, 0, -2)$ 是直线上一点.

再求直线的方向向量 \vec{s} .

已知直线的两平面的法向量为

$$\vec{n}_1 = (1, 1, 1), \quad \vec{n}_2 = (2, -1, 3)$$

$$\because \vec{s} \perp \vec{n}_1, \vec{s} \perp \vec{n}_2 \quad \therefore \vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$



$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (4, -1, -3)$$

故所给直线的对称式方程为 $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{-3}$

参数式方程为
$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -t \\ z = -2 - 3t \end{cases}$$

解题思路：先找直线上一点；

再找直线的方向向量.

$(1, 0, -2)$
是直线上一点



二、线面间的位置关系

1. 两直线的夹角

两直线的夹角指其方向向量间的夹角(锐角或直角)

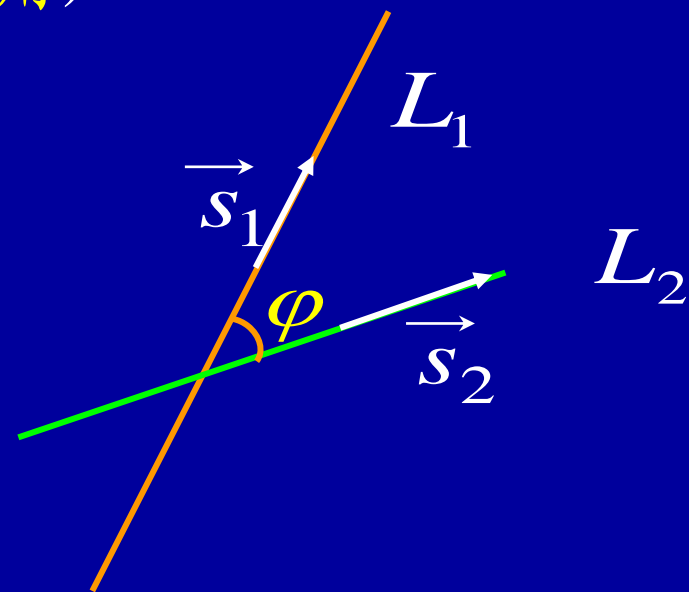
设直线 L_1, L_2 的方向向量分别为

$$\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1), \vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$$

则两直线夹角 φ 满足

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|}$$

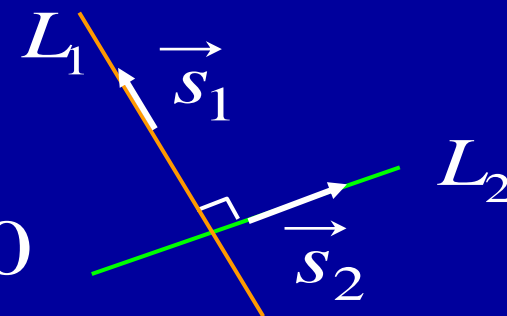
$$= \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$



特別有:

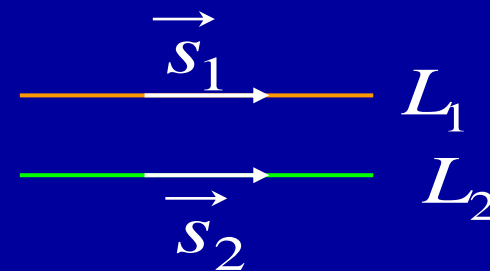
$$(1) \quad L_1 \perp L_2 \iff \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$$

$$\iff m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$



$$(2) \quad L_1 // L_2 \iff \vec{s}_1 // \vec{s}_2$$

$$\iff \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$



$$\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$$

$$\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$$



例2. 求以下两直线的夹角

$$L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z+3}{1} \quad L_2: \begin{cases} x+y+2=0 \\ x+2z=0 \end{cases}$$

解: 直线 L_1 的方向向量为 $\vec{s}_1 = (1, -4, 1)$

$$\text{直线 } L_2 \text{ 的方向向量为 } \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2, -2, -1)$$

二直线夹角 φ 的余弦为

$$\cos \varphi = \frac{|1 \times 2 + (-4) \times (-2) + 1 \times (-1)|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2} \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{从而 } \varphi = \frac{\pi}{4}$$



2. 直线与平面的夹角

当直线与平面不垂直时, 直线和它在平面上的投影直线所夹锐角 φ 称为直线与平面间的夹角;

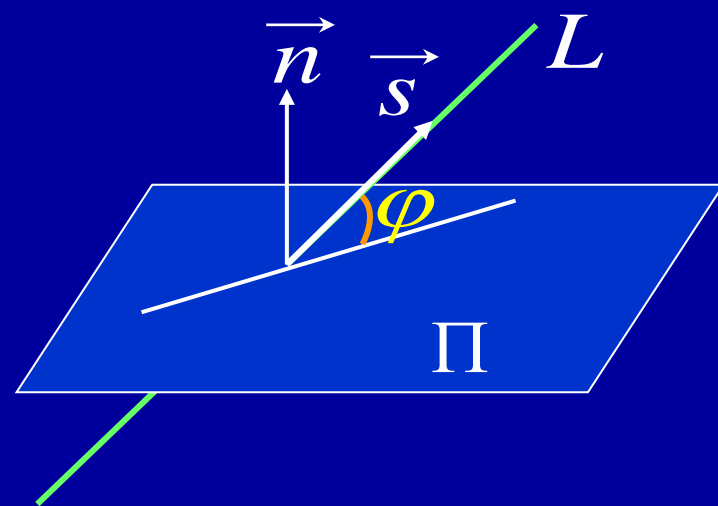
当直线与平面垂直时, 规定其夹角为 $\frac{\pi}{2}$.

设直线 L 的方向向量为 $\vec{s} = (m, n, p)$

平面 Π 的法线向量为 $\vec{n} = (A, B, C)$

则直线与平面夹角 φ 满足

$$\begin{aligned}\sin \varphi &= |\cos(\widehat{\vec{s}, \vec{n}})| \\ &= \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| |\vec{n}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\end{aligned}$$



特别有:

$$(1) L \perp \Pi \iff \vec{s} // \vec{n} \iff \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

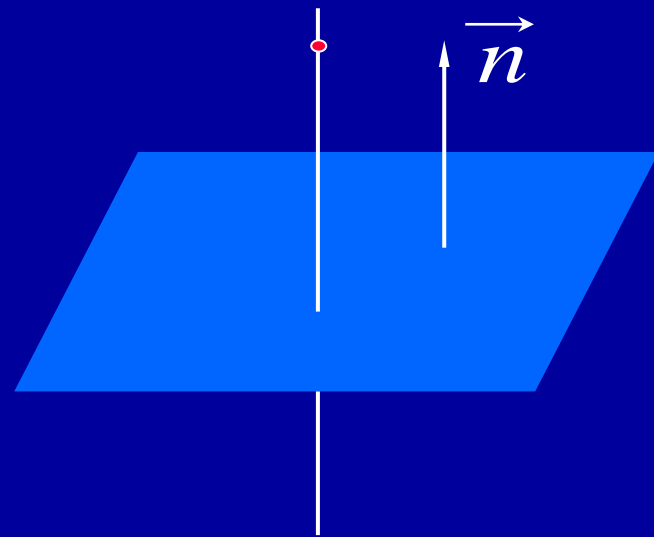
$$(2) L // \Pi \iff \vec{s} \perp \vec{n} \iff Am + Bn + Cp = 0$$

例3. 求过点 $(1, -2, 4)$ 且与平面 $2x - 3y + z - 4 = 0$
垂直的直线方程.

解: 取已知平面的法向量 $\vec{n} = (2, -3, 1)$
为所求直线的方向向量.

则直线的对称式方程为

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{1}$$



8.4 作业

P36

3, 5, 7,

9, 11, 13



三、实例分析

例4. 求与两平面 $x - 4z = 3$ 和 $2x - y - 5z = 1$ 的交线平行, 且过点 $(-3, 2, 5)$ 的直线方程.

提示: 所求直线的方向向量可取为

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = (-4, -3, -1)$$

利用点向式可得方程

$$\frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-5}{1}$$



例5. 求直线 $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2}$ 与平面

$$2x + y + z - 6 = 0$$

的交点 .

$$= t$$

提示: 化直线方程为参数方程

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$$

代入平面方程得 $t = -1$

从而确定交点为 $(1, 2, 2)$.



例6. 求过点 $(2, 1, 3)$ 且与直线 $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线方程.

提示: 先求二直线交点 P . 过已知点且垂直于已知直线的平面的法向量为 $(3, 2, -1)$, 故其方程为

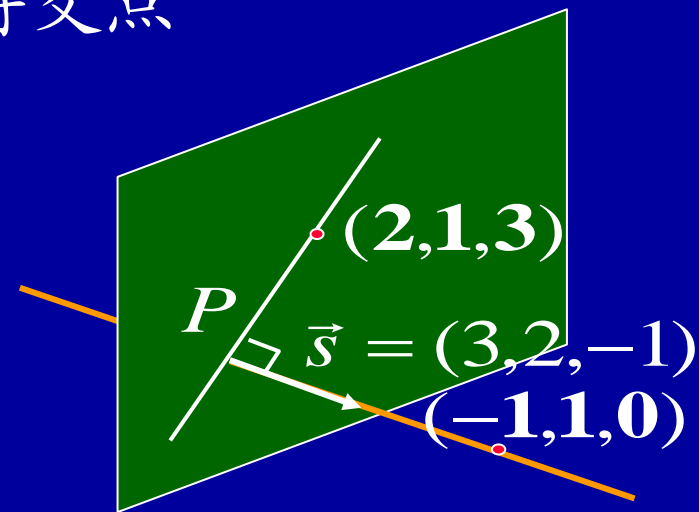
$$3(x-2) + 2(y-1) - (z-3) = 0 \quad ①$$

化已知直线方程为参数方程, 代入 ① 式, 可得交点

$$P\left(\frac{2}{7}, \frac{13}{7}, \frac{-3}{7}\right)$$

最后利用两点式得所求直线方程

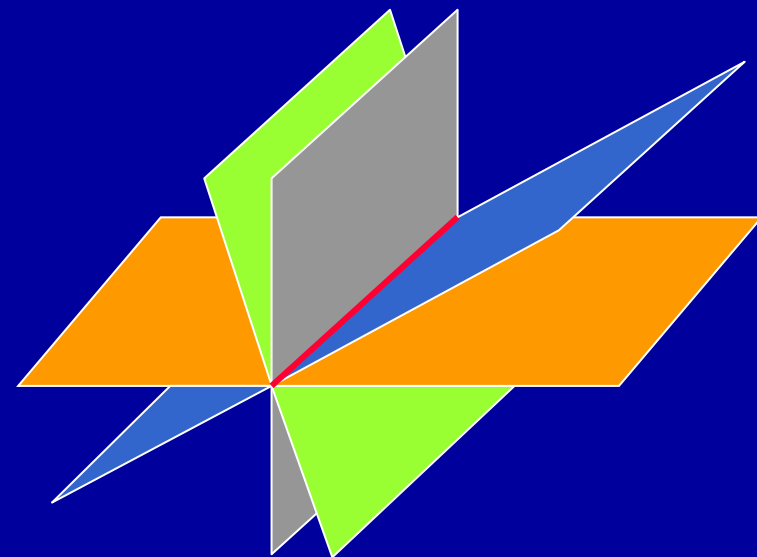
$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{4}$$



过直线的平面束方程

设直线

$$L: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$



则称方程

$$\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (\lambda_1, \lambda_2 \text{ 不全为 } 0)$$

为过直线L的平面束方程



例7. 求直线 $\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$ 在平面 $x + y + z = 0$ 上的投影直线方程.

提示: 过已知直线的平面束方程

$$x + y - z - 1 + \lambda(x - y + z + 1) = 0$$

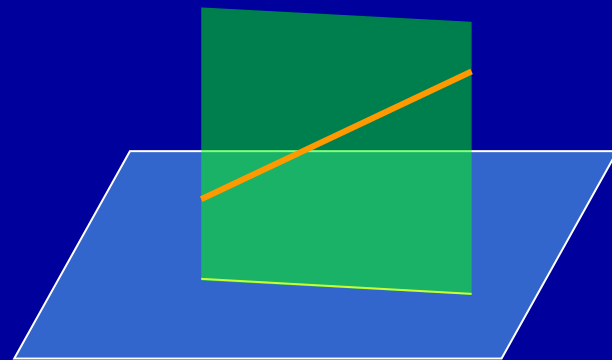
即 $(1 + \lambda)x + (1 - \lambda)y + (-1 + \lambda)z + (-1 + \lambda) = 0$

从中选择 λ 使其与已知平面垂直, 故应有:

$$(1 + \lambda) \cdot 1 + (1 - \lambda) \cdot 1 + (-1 + \lambda) \cdot 1 = 0$$

得 $\lambda = -1$, 从而得投影直线方程

$$\begin{cases} y - z - 1 = 0 & \longleftarrow \text{这是投影平面} \\ x + y + z = 0 & \longleftarrow \text{这是给定的平面} \end{cases}$$



内容小结

1. 空间直线方程

$$\text{一般式} \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{对称式} \quad \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

$$\text{参数式} \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

$$(m^2 + n^2 + p^2 \neq 0)$$



2. 线与线的关系

$$\text{直线 } L_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}, \quad \vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$$

$$\text{直线 } L_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}, \quad \vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$$

$$L_1 \perp L_2 \iff \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0 \iff m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

$$L_1 // L_2 \iff \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \vec{0} \iff \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\text{夹角公式: } \cos \varphi = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|}$$



3. 面与线间的关系

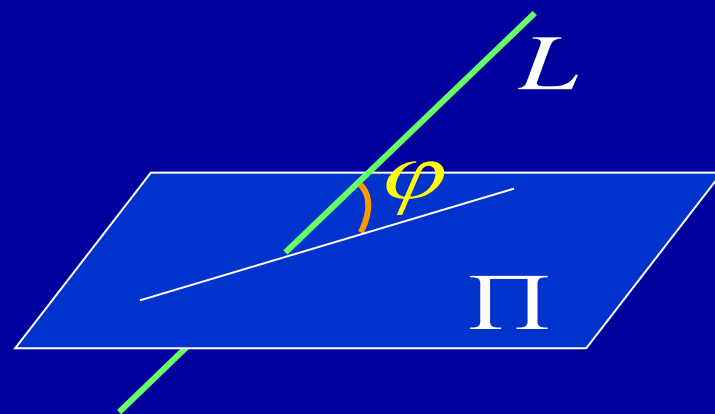
平面 Π : $Ax + By + Cz + D = 0$, $\vec{n} = (A, B, C)$

直线 L : $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$, $\vec{s} = (m, n, p)$

$$L \perp \Pi \iff \vec{s} \times \vec{n} = \vec{0} \iff \frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}$$

$$L // \Pi \iff \vec{s} \cdot \vec{n} = 0 \iff mA + nB + pC = 0$$

夹角公式: $\sin \varphi = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| |\vec{n}|}$



备用题

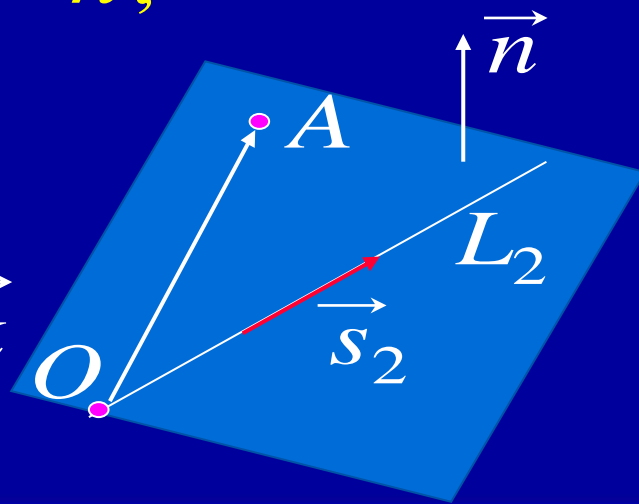
一直线过点 $A(1, 2, 1)$ 且垂直于直线 $L_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$,
又和直线 $L_2: \frac{x}{2} = y = \frac{z}{-1}$ 相交, 求此直线方程.

解: 方法1 利用叉积.

设直线 L_i 的方向向量为 \vec{s}_i ($i = 1, 2$), 过 A 点及 L_2 的平面的法向量为 \vec{n} , 则所求直线的方向向量 $\vec{s} = \vec{s}_1 \times \vec{n}$,

因原点 O 在 L_2 上, 所以

$$\vec{n} = \vec{s}_2 \times \vec{OA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$$



所求直线过
点 $A(1,2,1)$

待求直线的方向向量

$$\vec{s} = \vec{s}_1 \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 3(3\vec{i} - 2\vec{j} - 5\vec{k})$$

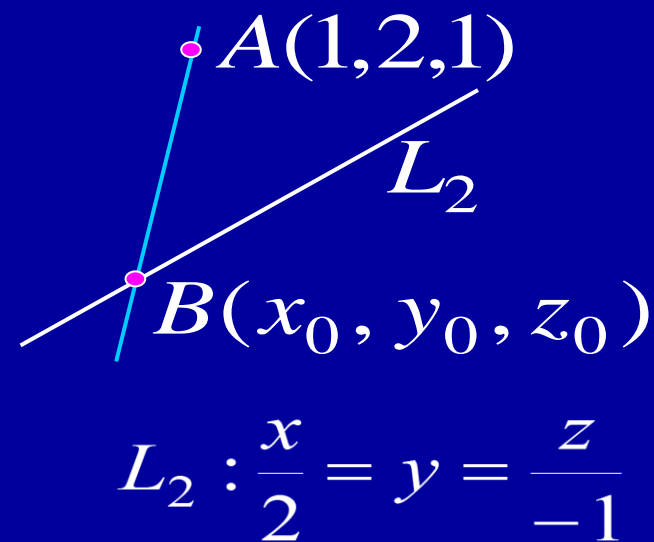
故所求直线方程为 $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{-5}$

方法2 利用所求直线与 L_2 的交点.

设所求直线与 L_2 的交点为 $B(x_0, y_0, z_0)$,

则有 $\frac{x_0}{2} = y_0 = \frac{z_0}{-1}$

即 $x_0 = 2y_0, z_0 = -y_0$



$$L_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$$

而 $\overrightarrow{AB} = (x_0 - 1, y_0 - 2, z_0 - 1) \perp L_1$

$$\therefore 3(x_0 - 1) + 2(y_0 - 2) + (z_0 - 1) = 0$$

将 $x_0 = 2y_0, z_0 = -y_0$ 代入上式, 得

$$y_0 = \frac{8}{7}, x_0 = \frac{16}{7}, z_0 = -\frac{8}{7}$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \left(\frac{9}{7}, \frac{-6}{7}, -\frac{15}{7}\right) = \frac{3}{7}(3, -2, -5)$$

由点向式得所求直线方程

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{-5}$$

