

## 第五节

# 曲面及其方程

一、曲面方程的概念

二、旋转曲面

三、柱面

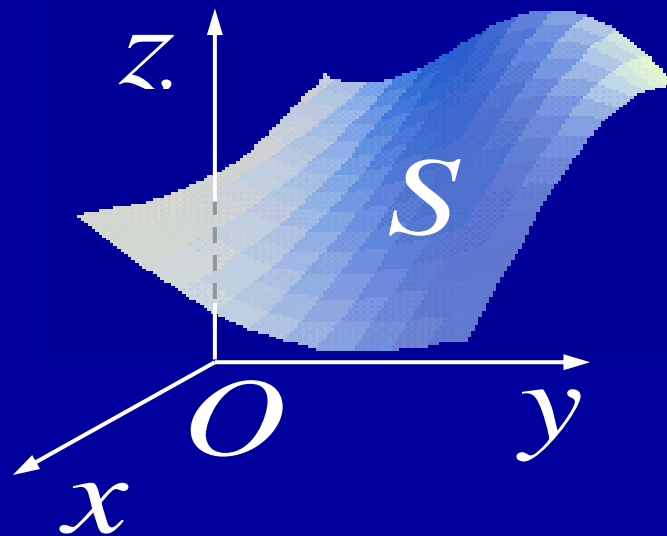
四、二次曲面



# 一、曲面研究的基本问题

- (1) 已知一曲面作为点的几何轨迹时, 求曲面方程.
- (2) 已知方程时, 研究它所表示的几何形状  
(必要时需作图).

$$F(x, y, z) = 0$$



**例1.** 求动点到定点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  距离为  $R$  的轨迹方程.

**解:** 设轨迹上动点为  $M(x, y, z)$ , 依题意  $|M_0M| = R$

即 
$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = R$$

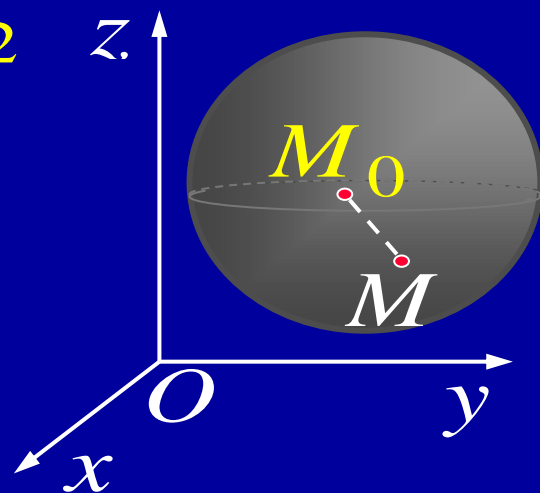
故所求方程为

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$$

特别, 当  $M_0$  在原点时, 球面方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

$z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  表示上(下)球面.



**例2.** 研究方程  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y = 0$  表示怎样的曲面.

**解:** 配方得  $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 5$

可见此方程表示一个球面

球心为  $M_0(1, -2, 0)$ , 半径为  $\sqrt{5}$

**说明:** 如一般地, 下形式的三元二次方程 ( $A \neq 0$ )

$$A(x^2 + y^2 + z^2) + Dx + Ey + Fz + G = 0$$

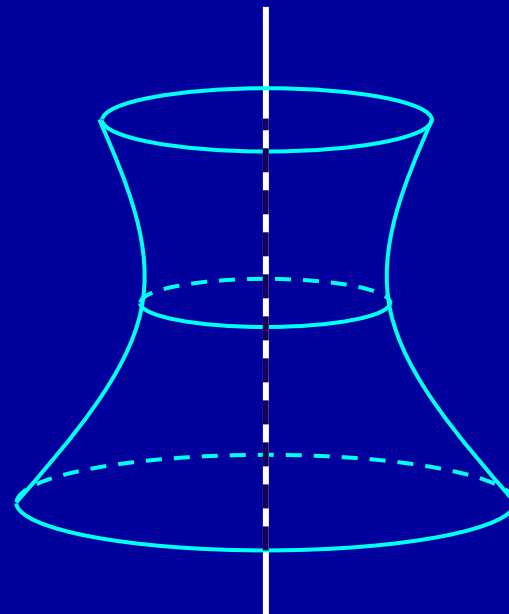
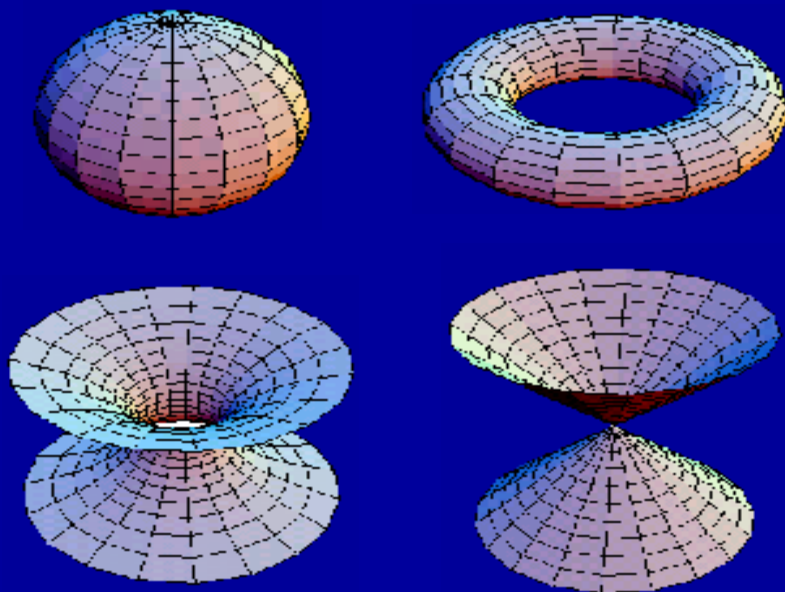
都可通过配方研究它的图形. 其图形可能是一个**球面**, 或**点**, 或**虚轨迹**.



## 二、旋转曲面

**定义2.** 一条平面曲线 绕其平面上一条**定直线**旋转一周所形成的曲面叫做**旋转曲面**. 该定直线称为**旋转轴**. 该旋转曲线称为旋转曲面的**母线**.

例如：



问题：建立 $yOz$ 面上曲线 $C$ 绕 $z$ 轴旋转所成曲面的方程：

给定  $yOz$  面上曲线  $C: f(y, z) = 0$

若点  $M_1(0, y_1, z_1) \in C$ , 则有

$$f(y_1, z_1) = 0$$

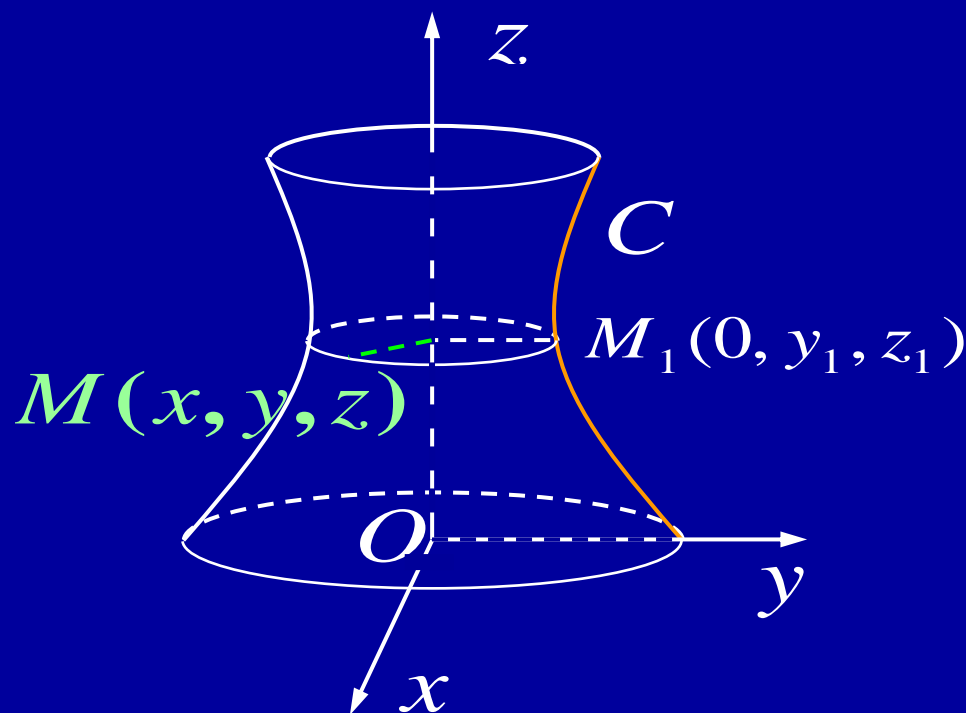
当绕 $z$ 轴旋转时，该点转到

$M(x, y, z)$ ，则有

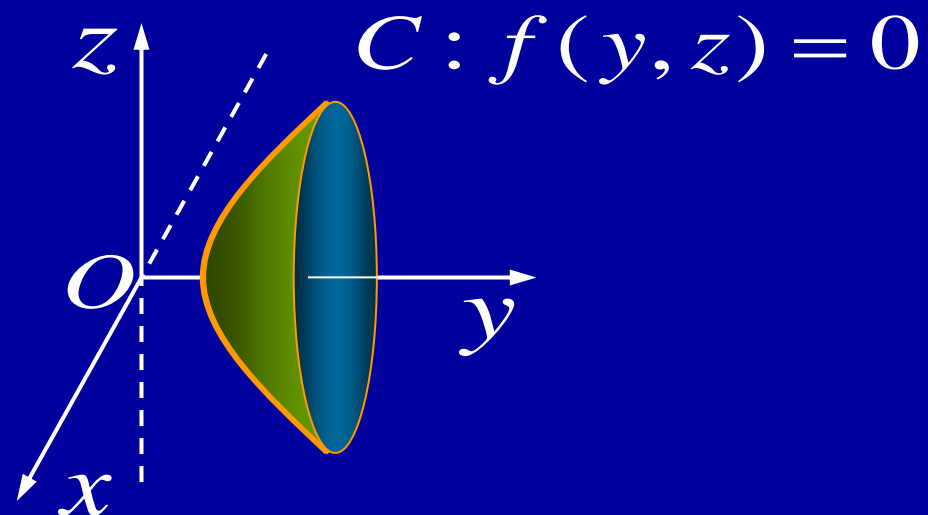
$$z = z_1, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = |y_1|$$

故所求旋转曲面方程为

$$f(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$



思考：当曲线  $C$  绕  $y$  轴旋转时，方程如何？



$$f(y, \pm \sqrt{x^2 + z^2}) = 0$$



**例3.** 试建立顶点在原点, 旋转轴为 $z$ 轴, 半顶角为  $\alpha$  的圆锥面方程.

**解:** 在 $yOz$ 面上直线 $L$ 的方程为

$$z = y \cot \alpha$$

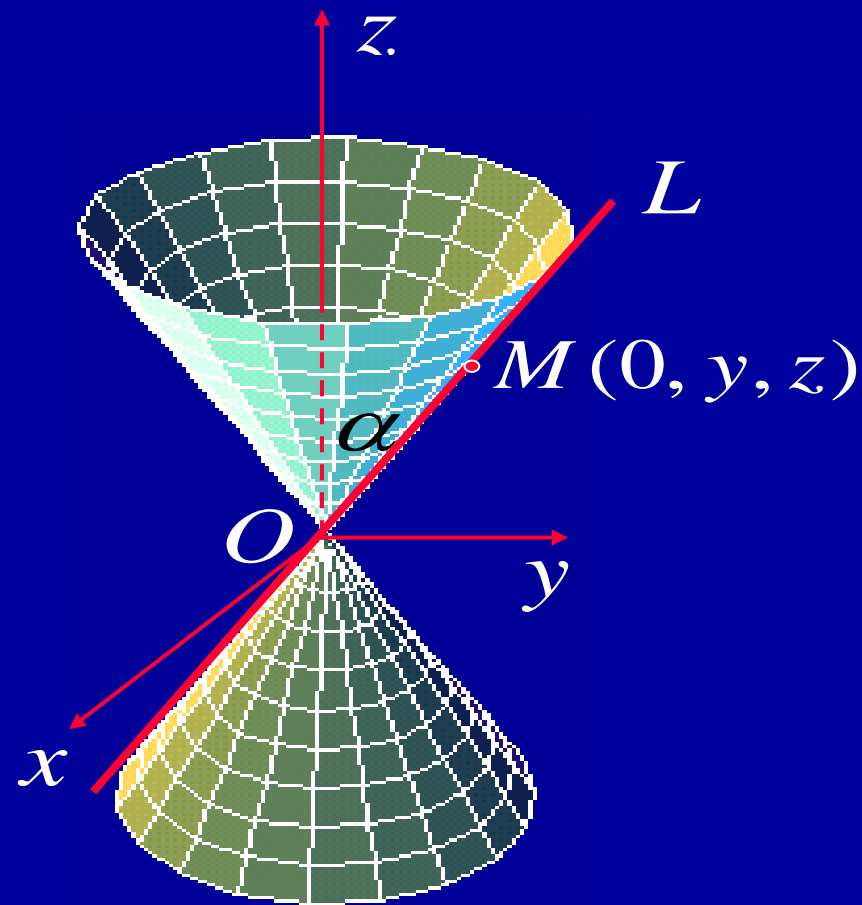
绕 $z$ 轴旋转时, 圆锥面的方程为

$$z = \pm \sqrt{x^2 + y^2} \cot \alpha$$

令  $a = \cot \alpha$

两边平方

$$z^2 = a^2 (x^2 + y^2)$$

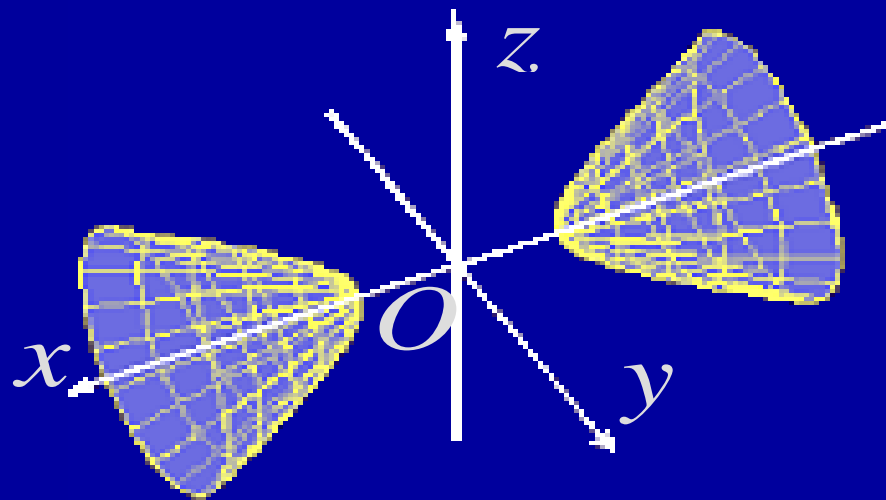
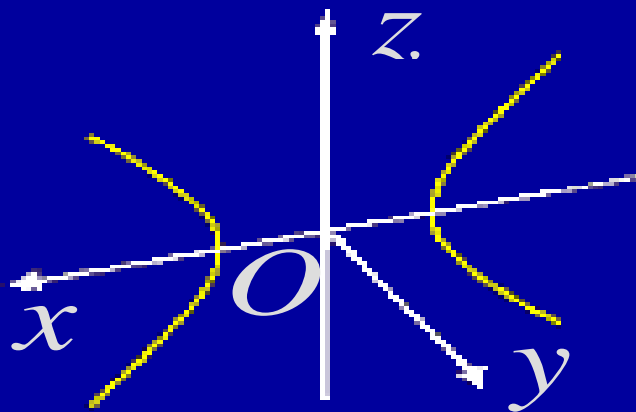




**例4.** 求坐标面  $xOz$  上的双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  分别绕  $x$  轴和  $z$  轴旋转一周所生成的旋转曲面方程.

**解:** 绕  $x$  轴旋转 所成曲面方程为

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1$$



称这种曲面叫做**旋转双叶双曲面**.

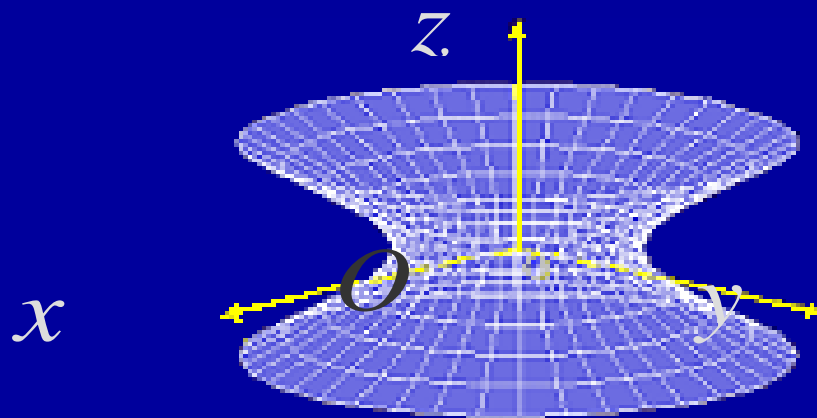
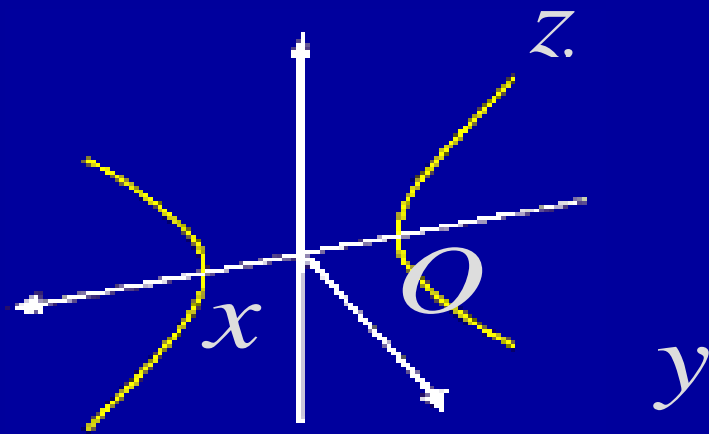


例4. 求坐标面  $xOz$  上的双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  分别绕  $x$  轴

和  $z$  轴旋转一周所生成的旋转曲面方程.

解: 绕  $z$  轴旋转 所成曲面方程为

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



称这种曲面叫做旋转单叶双曲面.

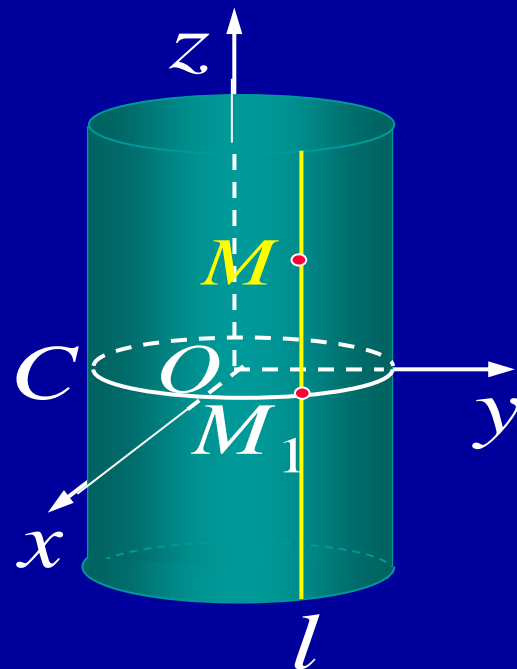


### 三、柱面

引例. 分析方程  $x^2 + y^2 = R^2$  表示怎样的曲面.

解: 在  $xOy$  面上,  $x^2 + y^2 = R^2$  表示圆  $C$ ,

在圆  $C$  上任取一点  $M_1(x, y, 0)$ , 过此点作平行  $z$  轴的直线  $l$ , 对任意  $z$ , 点  $M(x, y, z)$  的坐标也满足方程  $x^2 + y^2 = R^2$



沿圆周  $C$  平行于  $z$  轴的一切直线所形成的曲面称为**圆柱面**.

其上所有点的坐标都满足此方程, 故在空间

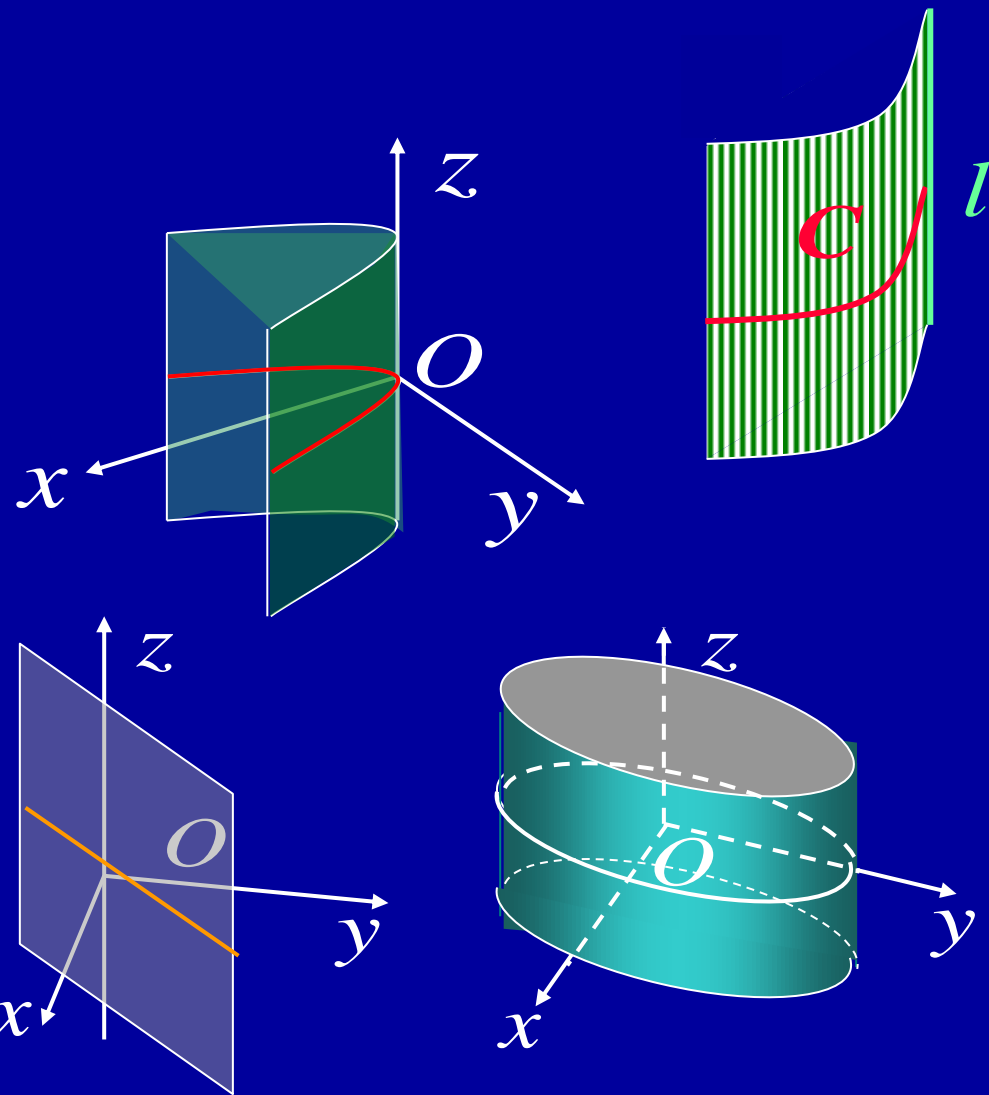
$x^2 + y^2 = R^2$  表示**圆柱面**



**定义3.** 直线  $l$  沿定曲线  $C$  平行移动形成的轨迹叫做**柱面**.

$C$  叫做**准线**,  $l$  叫做**母线**.

- $y^2 = 2x$  表示**抛物柱面**,  
母线平行于  $z$  轴;  
准线为  $xOy$  面上的抛物线.
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  表示母线平行于  
 $z$  轴的**椭圆柱面**.
- $x - y = 0$  表示母线平行于  
 $z$  轴的**平面**.  
(且  $z$  轴在平面上)



一般地, 在空间直角坐标系中  
方程  $F(x, y) = 0$  表示柱面,

母线 平行于  $z$  轴;

准线是  $xOy$  面上的曲线  $l_1$ .

方程  $G(y, z) = 0$  表示柱面,

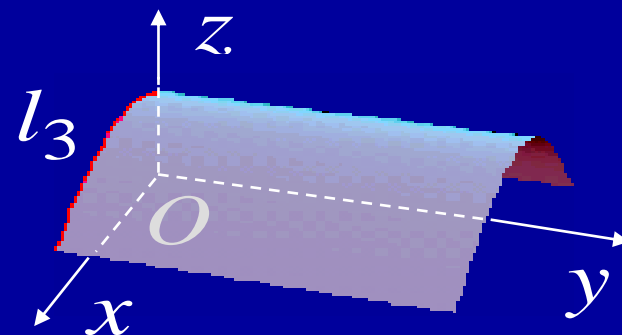
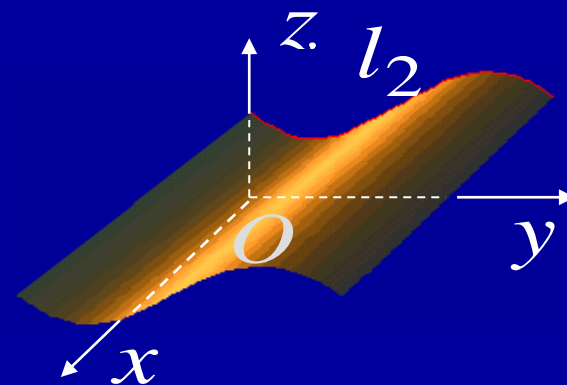
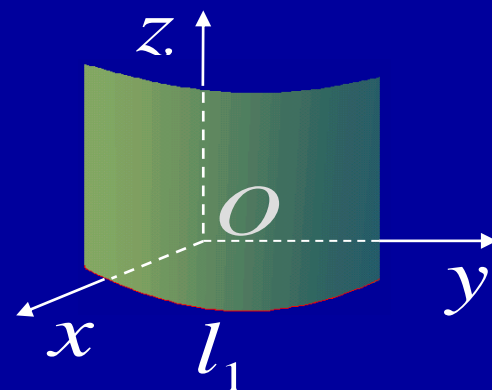
母线 平行于  $x$  轴;

准线  $yOz$  面上的曲线  $l_2$ .

方程  $H(z, x) = 0$  表示柱面,

母线 平行于  $y$  轴;

准线  $xOz$  面上的曲线  $l_3$ .



## 四、二次曲面

三元二次方程

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx \\ + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

(二次项系数不全为 0)

的图形统称为**二次曲面**. 其基本类型有:

椭球面、抛物面、双曲面、锥面

适当选取直角坐标系可得它们的标准方程,

下面仅就几种常见标准型的特点进行介绍.

研究二次曲面特性的基本方法:**截痕法**



## 1. 椭圆锥面

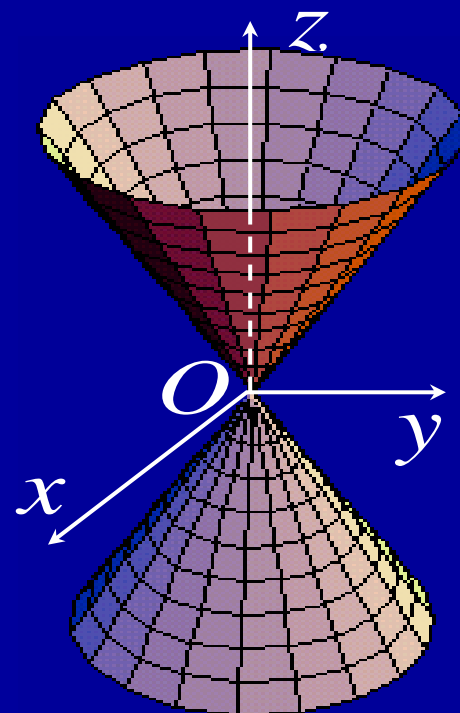
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2 \quad (a, b \text{ 为正数})$$

在平面  $z = t$  上的截痕为椭圆

$$\frac{x^2}{(at)^2} + \frac{y^2}{(bt)^2} = 1, \quad z = t \quad ①$$

在平面  $x = 0$  或  $y = 0$  上的截痕为过原点的两直线.

椭圆锥面也可由圆锥面经  $y$  方向的伸缩变换得到

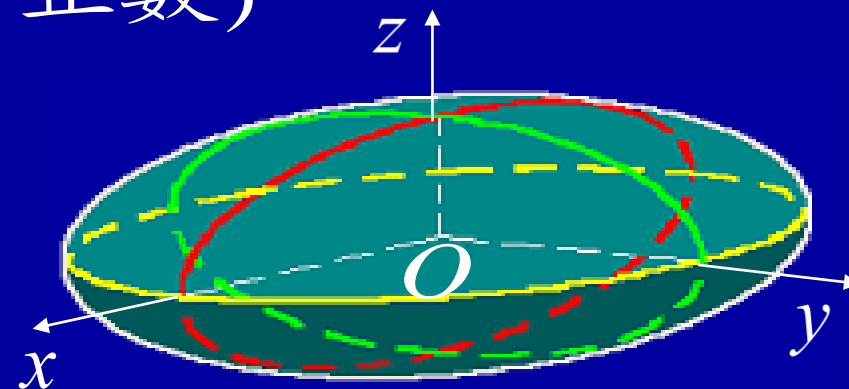


## 2. 椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a, b, c \text{ 为正数})$$

(1) 范围:

$$|x| \leq a, \quad |y| \leq b, \quad |z| \leq c$$



(2) 与坐标面的交线: 椭圆

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

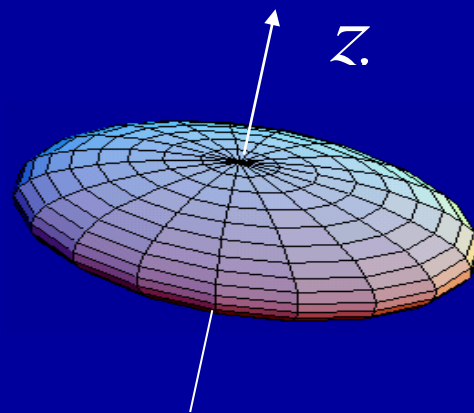




$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a, b, c \text{ 为正数})$$

(3) 截痕: 与  $z = z_1$  ( $|z_1| < c$ ) 的交线为椭圆:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2 - z_1^2)} + \frac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2 - z_1^2)} = 1 \\ z = z_1 \end{cases}$$



同样  $y = y_1$  ( $|y_1| \leq b$ ) 及  $x = x_1$  ( $|x_1| \leq a$ ) 的截痕也为椭圆.

(4) 当  $a = b$  时为旋转椭球面; 当  $a = b = c$  时为球面.



### 3. 双曲面

#### (3) 单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a, b, c \text{ 为正数})$$

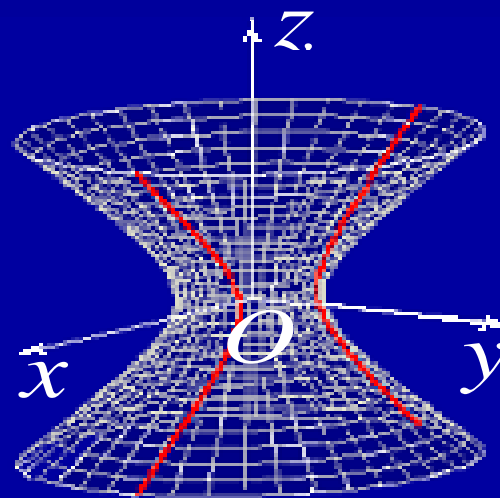
平面  $z = z_1$  上的截痕为 **椭圆**.

平面  $y = y_1$  上的截痕情况:

1)  $|y_1| < b$  时, 截痕为 **双曲线**:

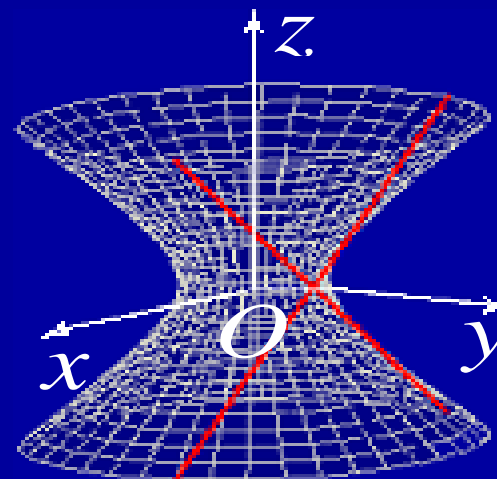
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y_1^2}{b^2} \\ y = y_1 \end{cases}$$

(实轴平行于  $x$  轴;  
虚轴平行于  $z$  轴)



2)  $|y_1| = b$  时, 截痕为 相交直线:

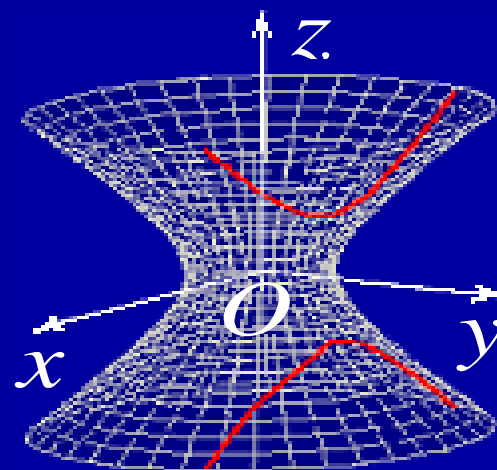
$$\begin{cases} \frac{x}{a} \pm \frac{z}{c} = 0 \\ y = b \text{ (或 } -b) \end{cases}$$



3)  $|y_1| > b$  时, 截痕为 双曲线:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y_1^2}{b^2} < 0 \\ y = y_1 \end{cases}$$

(实轴平行于  $z$  轴;  
虚轴平行于  $x$  轴)



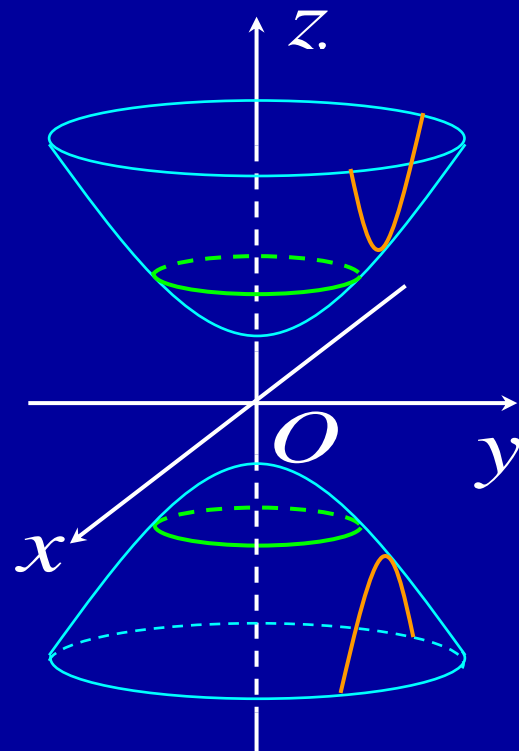
#### (4) 双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (a, b, c \text{ 为正数})$$

平面  $y = y_1$  上的截痕为 双曲线

平面  $x = x_1$  上的截痕为 双曲线

平面  $z = z_1$  ( $|z_1| > c$ ) 上的截痕为 椭圆



注意单叶双曲面与双叶双曲面的区别:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \begin{cases} 1 & \text{单叶双曲面} \\ -1 & \text{双叶双曲面} \end{cases}$$

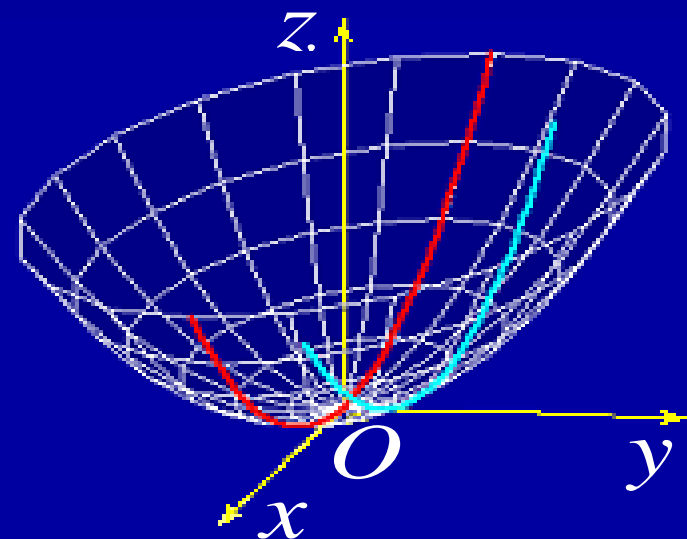


## 4. 抛物面

### (5) 椭圆抛物面

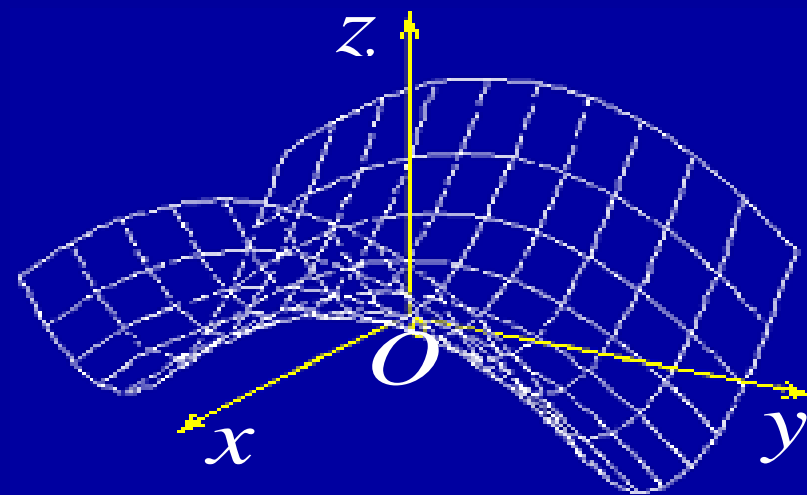
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z \quad (a, b \text{ 为正数})$$

特别, 当  $a=b$  时为绕  $z$  轴的旋转抛物面.



### (6) 双曲抛物面 (鞍形曲面)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z \quad (a, b \text{ 为正数})$$



## 5. 柱面

(7) 椭圆柱面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b \text{ 为正数})$$

(8) 双曲柱面

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b \text{ 为正数})$$

(9) 抛物柱面

$$x^2 = ay \quad (a \text{ 为正数})$$



## 8.5 作业

P44-45

2 ; 4; 7 ;

8 (1), (5) ; 11



## 内容小结

1. 空间曲面  $\longleftrightarrow$  三元方程  $F(x, y, z) = 0$

- 球面  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

- 旋转曲面

如, 曲线  $\begin{cases} f(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$  绕  $z$  轴的旋转曲面:

$$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$

- 柱面

如, 曲面  $F(x, y) = 0$  表示母线平行  $z$  轴的柱面.

又如, 椭圆柱面, 双曲柱面, 抛物柱面等.





## 2. 二次曲面 $\longleftrightarrow$ 三元二次方程

- 椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

- 抛物面: 椭圆抛物面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$

- 双曲面: 单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- 椭圆锥面:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$

双曲抛物面

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

