

第六节

空间曲线及其方程

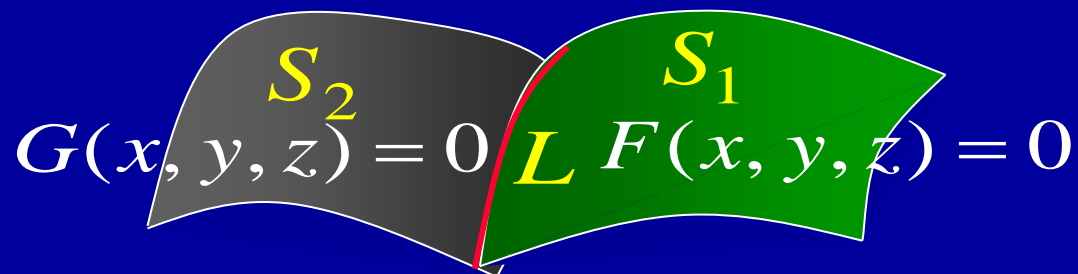
- 一、空间曲线的一般方程
- 二、空间曲线的参数方程
- 三、空间曲线在坐标面上的投影



一、空间曲线的一般方程

空间曲线可视为两曲面的交线, 其一般方程为方程组

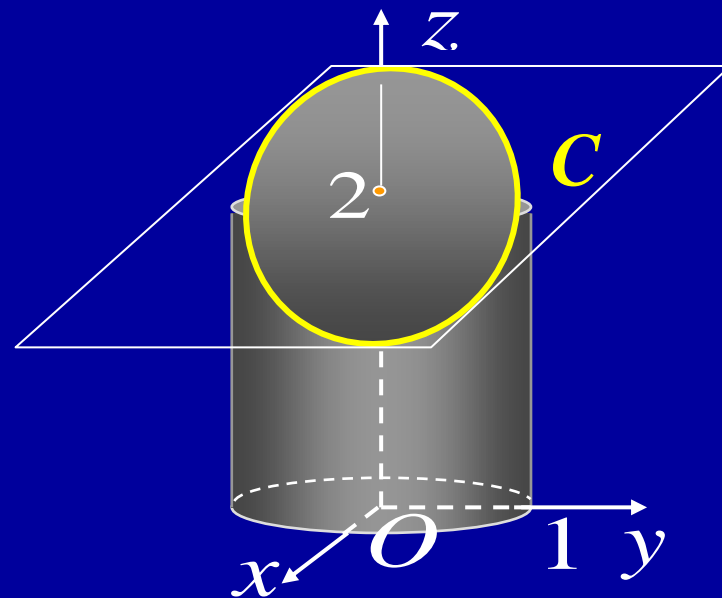
$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$



例如, 方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x + 3z = 6 \end{cases}$$

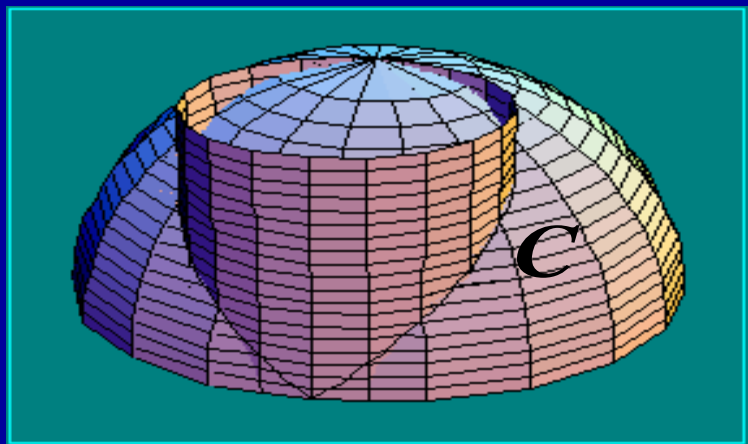
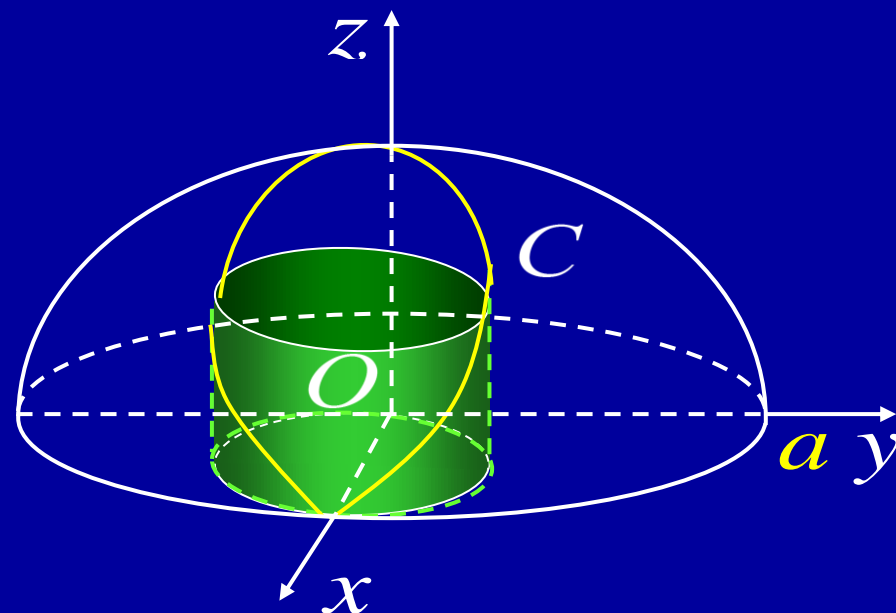
表示圆柱面与平面的交线 C .



又如, 方程组

$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 - ax = 0 \end{cases}$$

表示上半球面与圆柱面的交线 C .



二、空间曲线的参数方程

将空间曲线 C 上的动点坐标 x, y, z 表示成参数 t 的函数:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (2)$$

当给定 $t = t_1$ 时, 就得到上的一个点 (x_1, y_1, z_1) ;

随着 t 的变动便可得曲线 C 上的全部点。

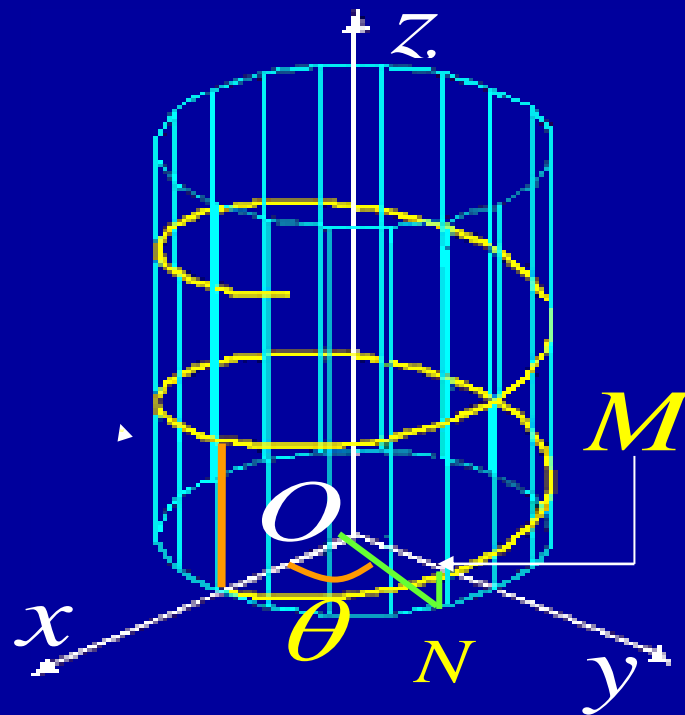
称方程组 (2) 为空间曲线的 C 参数方程.



例3. 如果空间一点 M 在圆柱 $x^2 + y^2 = a^2$ 上以角速度 ω 绕 z 轴旋转, 同时又以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升, 那么点 M 构成的图形叫**螺旋线**。试求其参数方程。

解: 所求方程为:

$$\begin{cases} x = a \cos \omega t \\ y = a \sin \omega t \\ z = vt \end{cases} \xrightarrow{\text{令 } \theta = \omega t, b = \frac{v}{\omega}} \begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \sin \theta \\ z = b \theta \end{cases}$$



当 $\theta = 2\pi$ 时, 上升高度 $h = 2\pi b$, 称为**螺距**。



例4. 将下列曲线化为参数方程表示:

$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x + 3z = 6 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 - ax = 0 \end{cases}$$

解: (1) 根据第一方程引入参数, 得所求为

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = \frac{1}{3}(6 - 2\cos t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

(2) 将第二方程变形为 $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$, 故所求为

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos t \\ y = \frac{a}{2}\sin t \\ z = a\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos t} \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$



三、空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线 C 的一般方程为
$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

➤消去 z 得柱面方程 $H(x, y) = 0$,

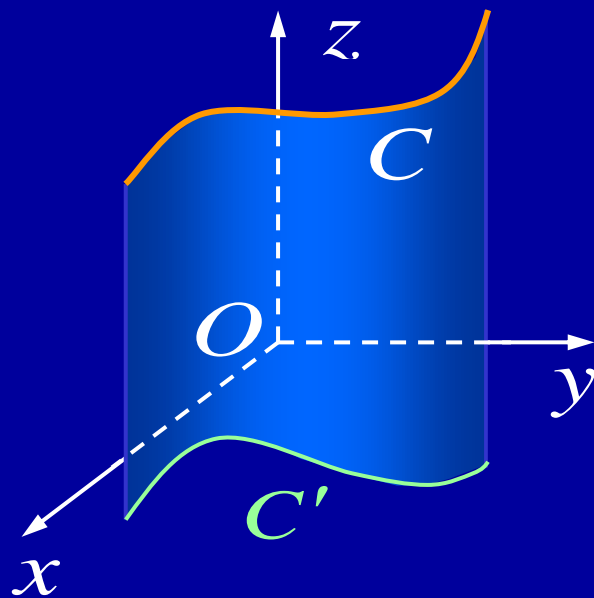
则方程
$$\begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

包含 C 在 xOy 面上的投影曲线 C'

➤消去 x 得包含 C 在 yOz 面上的投影曲线的方程

$$\begin{cases} R(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

➤消去 y 得包含 C 在 zOx 面上的投影曲线的方程
$$\begin{cases} T(x, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

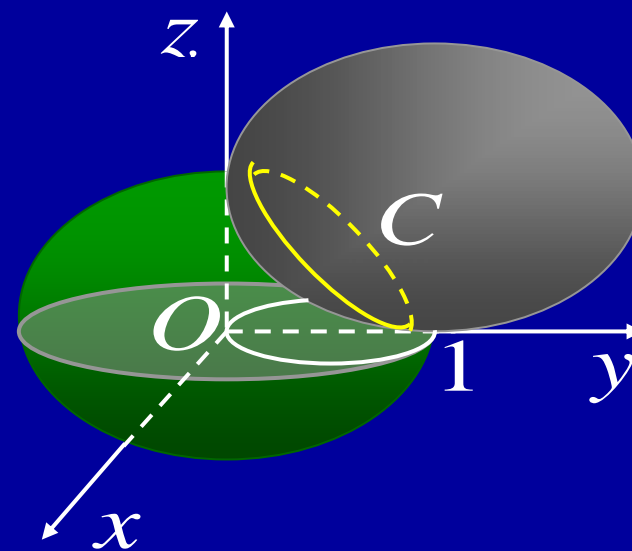


例如,

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1 \end{cases}$$

在 xOy 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$



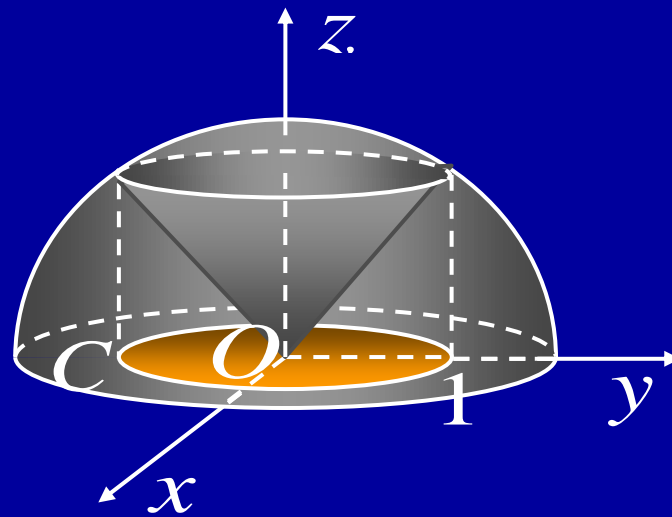
又如,

上半球面 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 和锥面 $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ 所围的立体在 xOy 面上的投影区域为: 二者交线在 xOy 面上的投影曲线所围之域.

$$\text{二者交线 } C: \begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ z = \sqrt{3(x^2 + y^2)} \end{cases}$$

在 xOy 面上的投影曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

所围圆域: $x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$.



8.6 作业

P51

3, 4, 5(1)



内容小结

- 空间曲线 \longleftrightarrow 三元方程组
或参数方程 (如, 圆柱螺线)
- 求投影曲线

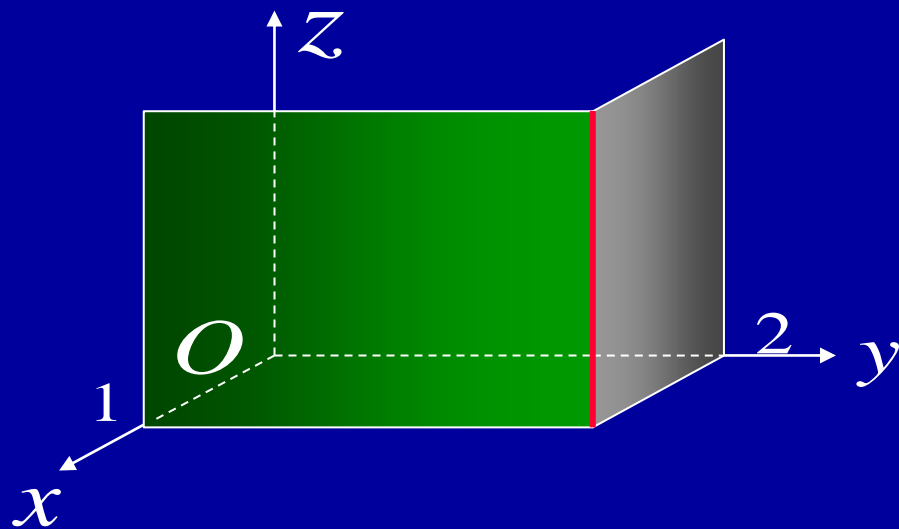
思考与练习

P36 题 1, 2, 7 (展示空间图形)

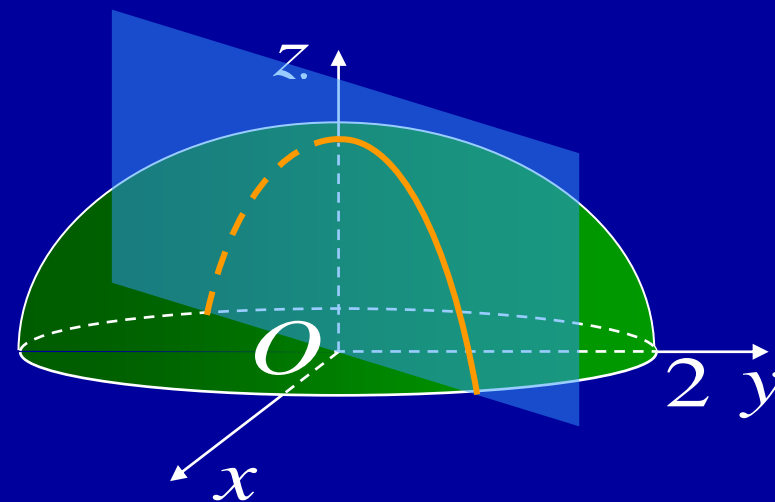


答案: P51 题1

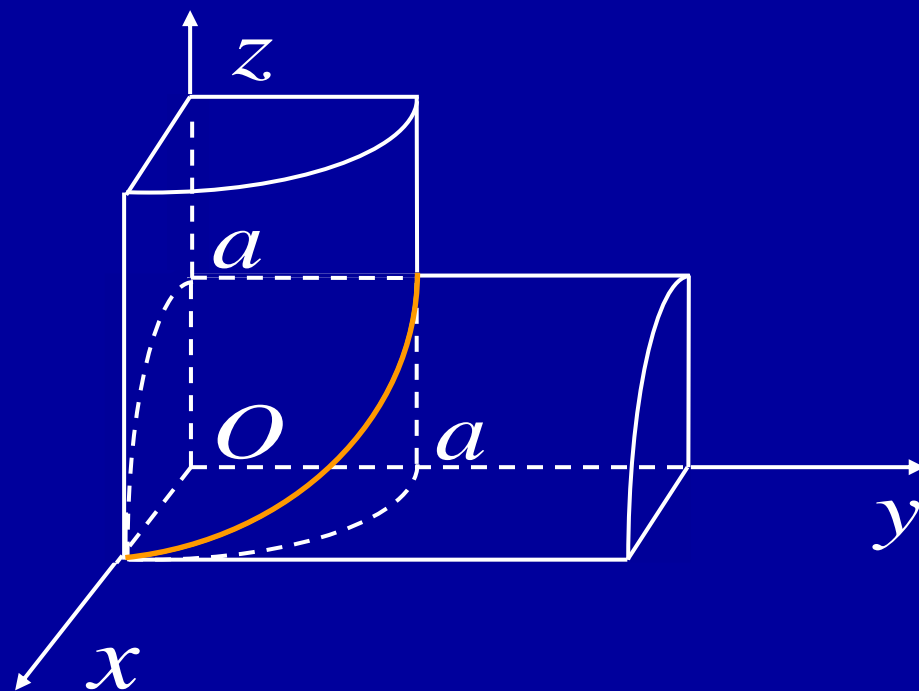
$$(1) \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$



$$(2) \begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ y - x = 0 \end{cases}$$

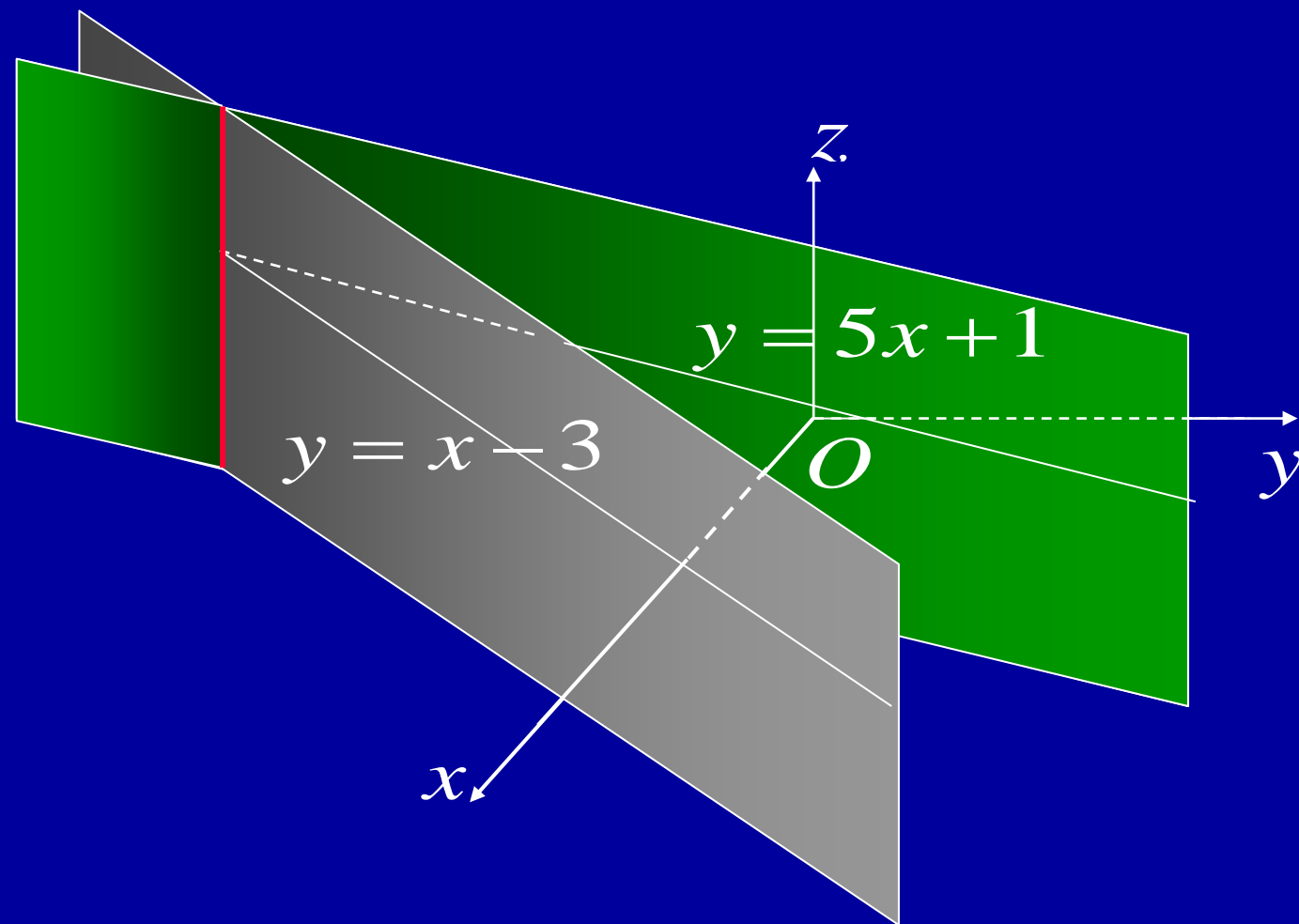


$$(3) \quad \begin{cases} x^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$



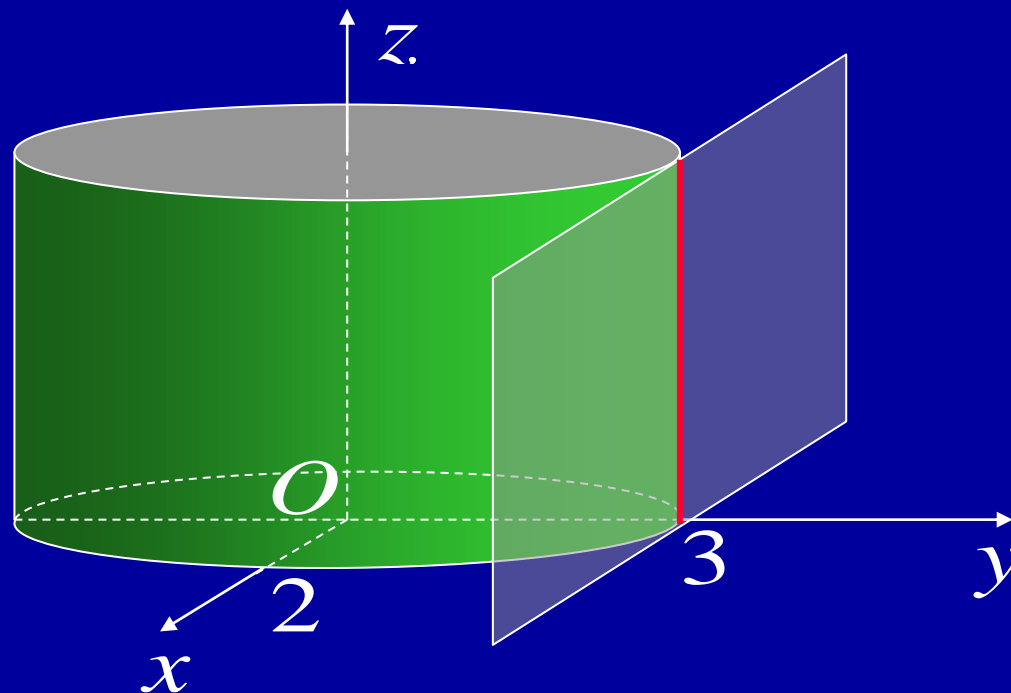
P51 题2 (1)

$$\begin{cases} y = 5x + 1 \\ y = x - 3 \end{cases}$$



P51 题2(2)

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$



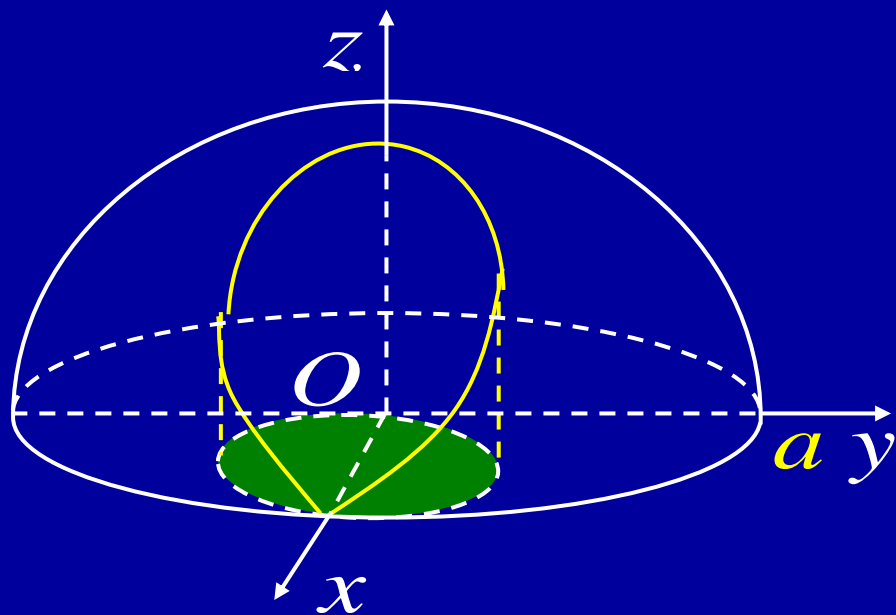
思考: 对平面 $y = b$

当 $|b| < 3$ 时, 交线情况如何?

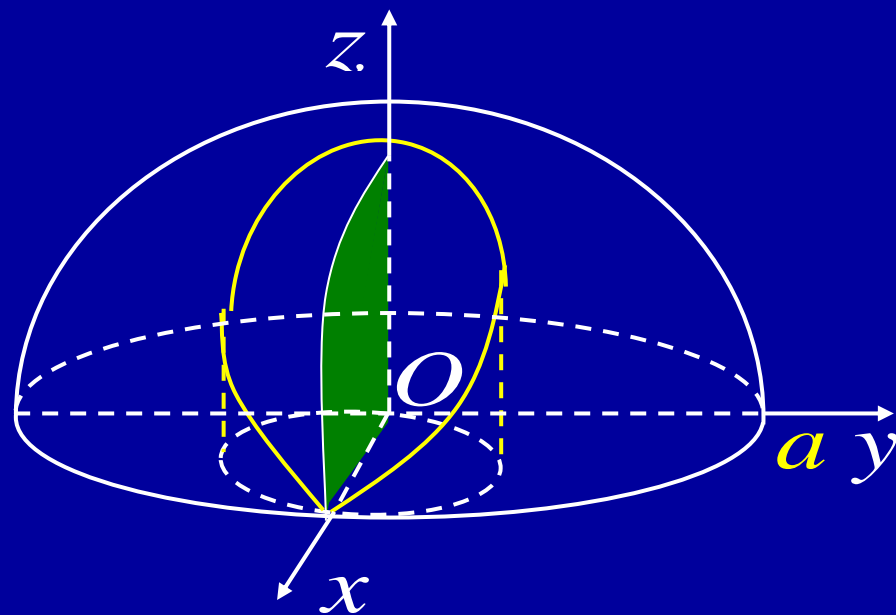
当 $|b| > 3$ 时, 交线情况如何?



P51 题 7



$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq ax \\ z = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x^2 + z^2 \leq a^2 & (x \geq 0, z \geq 0) \\ y = 0 \end{cases}$$



备用题 求曲线 $\begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转的曲面与平面

$x + y + z = 1$ 的交线在 xOy 平面的投影曲线方程.

解: \because 旋转曲面方程为 $z = x^2 + y^2$, 它与所给平面的

交线为
$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

此曲线向 xOy 面的投影柱面方程为

$$x + y + x^2 + y^2 = 1$$

此曲线在 xOy 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

