

06/07 浙江工业大学高等数学(下)期中考试试卷 A 07.4

学院: \_\_\_\_\_ 班级: \_\_\_\_\_ 姓名: \_\_\_\_\_ 学号: \_\_\_\_\_ 任课教师: \_\_\_\_\_

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一、填空题 (每小题 4 分):

1. 设  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 3$ , 则  $[(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{c})] \cdot (\vec{c} + \vec{a}) = \underline{6}$ .

2. 设  $z = x^y$  ( $x > 0, x \neq 1$ ), 则  $dz = \underline{y x^{y-1} dx + x^y \ln x dy}$ .

3. 设  $z = f(\frac{x}{y}, y)$ , 其中  $f(x, y)$  二阶偏导数连续, 则  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \underline{-\frac{1}{y^2} f''}$ .

4. 若函数  $f(x, y) = 2x^2 + ax + bxy^2 + 2y$  在点  $(1, -1)$  取得极值, 则常数  $a = \underline{-5}$ ,  $b = \underline{1}$ , 是极 大 值。

5. 曲面  $e^z - z + xy = 3$  在点  $P(2, 1, 0)$  处的切平面方程是  $\underline{x + y - 4 = 0}$ .

6. 过空间曲线  $x = f(y), y = g(z)$  (其中  $f(y), g(z)$  均可微) 上相应于  $z = z_0$  点

处的切线方程是  $\underline{\frac{x - f(g(z_0))}{f'(g(z_0)) \cdot g'(z_0)} = \frac{y - g(z_0)}{g'(z_0)} = \frac{z - z_0}{1}}$ .

7.  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的领域内有定义, 且  $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$  则下列陈述: (A)  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  连续; (B)  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的全微分  $dz = 0$ ; (C) 曲线  $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = y_0 \end{cases}$  在点  $(x_0, y_0, z_0)$  处有切线, 且切线平行  $x$  轴, 其中  $z_0 = f(x_0, y_0)$ ; (D)  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  有极值; 其中正确的是 C.

8. 函数  $u = 3x^2y^2 - 2y + 4x + 6z$  在原点沿  $\overrightarrow{OA} = (2, 3, 1)$  方向的方向导数是  $\underline{\frac{\sqrt{14}}{7}}$ .

9.  $\int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} dy = \underline{\sqrt{2} - 1}$ .

10. 设  $D: |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ , 则  $\iint_D |y - x^2| dx dy = \underline{\frac{11}{15}}$ .

11. 设  $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$ , 则在球面坐标系下, 以下三重积分的三次积分  $\iiint_{\Omega} f(x^2 + y^2) dv = \underline{\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 f(r^2 \sin^2 \varphi) r^2 \sin \varphi dr}$ .

12. 设  $\Omega$  是平面  $x + y + z + 1 = 0, x + y + z + 2 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$  围成

的闭区域  $I_1 = \iiint_{\Omega} (x+y+z) dv$ ,  $I_2 = \iiint_{\Omega} (x+y+z)^2 dv$ , 则  $I_1 \leq I_2$  (大小关系)

二、试解下列各题 (每小题 7 分):

1. 一平面过两点  $M_1(1,1,1)$ ,  $M_2(0,1,-1)$  且垂直于平面  $x+y+z=0$ , 求它的方程。

$$\begin{aligned}\vec{n} &= (1, 0, 2) \times (1, 1, 1) \\ &= (-2, 1, 1)\end{aligned}$$

$$\text{平面方程: } -2(x-1) + y-1 + z-1 = 0$$

$$\text{即 } 2x - y - z = 0$$

2. 设  $f(x, y, z) = x^2 z^3 e^y$ , 其中  $z = z(x, y)$  是由方程  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$  所确

定的隐函数, 求:  $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{\substack{x=-1 \\ y=0}}$ , 其中  $u(x, y) = f(x, y, z(x, y))$ 。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xz^3e^y + 3xz^2e^y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{即 } x=-1, y=0 \text{ 时 } z=1$$

$$\text{即 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2 - 3yz}{3z^2 - 3xy} \quad \therefore \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=-1 \\ y=0}} = -1$$

$$\therefore \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{\substack{x=-1 \\ y=0}} = -2 + 3 \times (-1) = -5$$

3. 试证曲面  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$  ( $a > 0$ ) 上任何点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于  $a$

证:  $\forall (x_0, y_0, z_0)$  在曲面上.

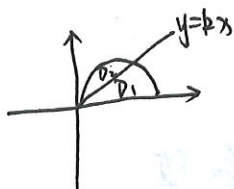
$$\text{该点切平面为 } \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0) + \frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y-y_0) + \frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z-z_0) = 0$$

$$\text{截距分别为 } \sqrt{ax_0}, \sqrt{ay_0}, \sqrt{az_0}$$

$$\therefore \sqrt{ax_0} + \sqrt{ay_0} + \sqrt{az_0} = a.$$

三、(7分) 设直线  $y=kx$  把曲线  $x^2+y^2-2ax=0$  ( $k>0, a>0$ ) 所围成的区域分成

两部分  $D_1, D_2$ , 试求  $\iint_{D_1} \sqrt{x^2+y^2} dx dy$ ,  $\iint_{D_2} \sqrt{x^2+y^2} dx dy$ 。



$$\begin{aligned} \iint_{D_1} \sqrt{x^2+y^2} dx dy &= \int_0^{\arctan k} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} \rho \cdot \rho d\rho \\ &= \int_0^{\arctan k} \frac{8}{3} a^3 \cos^3 \theta d\theta \\ &= \frac{8}{3} a^3 \cdot \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} - \frac{8}{9} a^3 \cdot \frac{k^3}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{D_2} \sqrt{x^2+y^2} dx dy &= \int_{\arctan k}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} \rho \cdot \rho d\rho \\ &= \int_{\arctan k}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{3} a^3 \cos^3 \theta d\theta \\ &= \frac{8}{3} a^3 \left(1 - \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right) - \frac{8}{9} a^3 \left(1 - \frac{k^3}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \end{aligned}$$

四、(8分) 求  $\iiint_{\Omega} (x^2+y^2) dv$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $4z^2=25(x^2+y^2)$  及平面  $z=5$  所

围成的闭区域。



$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x^2+y^2) dv &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{5}{2}} \rho d\rho \int_{\frac{5}{2}\rho}^5 \rho^2 dz \\ &= 8\pi \end{aligned}$$

五、(8分) 求函数  $z = x^2 + y^2 + 2xy - 2x$  在闭域  $x^2 + y^2 \leq 1$  上的最大值、最小值。

$$\text{解} \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y - 2 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 2x = 0 \end{cases} \quad \text{无解}$$

下面考虑  $z = x^2 + y^2 + 2xy - 2x$  在  $x^2 + y^2 = 1$  上的最值

$$\text{设 } L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + 2xy - 2x + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\begin{cases} L_x = 2x + 2y - 2 + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 2y + 2x + 2\lambda y = 0 \\ L_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{得 } A(0, 1) \text{ 处 } z = 1$$

$$B(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}) \quad z = 1 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$C(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}) \quad z = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{最大值为 } 1 + \frac{3}{2}\sqrt{3}, \text{ 最小值为 } 1 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

六、(8分) 设  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ , 试证明:  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$

处连续且偏导数存在, 但不可微分。

$$\text{证: } (1) \because 0 \leq \left| \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right| \leq \left| \frac{x^2 y^2}{\frac{1}{2}|xy|^2} \right| \leq \frac{\sqrt{2}}{4} |xy|^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$$

$$\therefore \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$$

$\therefore f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处连续。

$$(2) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$$

$$\therefore f_x(0, 0) = 0 \quad (3) \text{ 证 } f_y(0, 0) = 0$$

$\therefore$  在  $(0, 0)$  处偏导数存在。

$$(3) \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)\Delta x - f_y(0, 0)\Delta y}{\rho} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2}{((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)^{3/2}}$$

$$\text{令 } \Delta y = k\Delta x, \text{ 则 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 (k\Delta x)^2}{((\Delta x)^2 + (k\Delta x)^2)^{3/2}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k^2}{(1+k^2)^{3/2}} = \frac{k^2}{(1+k^2)^{3/2}} \text{ 与 } k \text{ 有关}$$

$\therefore$  极限不存在  $\therefore$  在  $(0, 0)$  不可微分