09/10(二)浙江工业大学高等数学(下)期中考试试卷A

学院：_____ 班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____

任课教师：_____

题 号	一	二	三	四	五	总 分
得 分						

一、填空题（每小题4分）：

1、设向量 $\vec{a}=(4,3,-5)$，$\vec{b}=(k,0,4)$，若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $k=$ 5 。

2、已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不平行，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=4$，$\vec{c}=2(\vec{a}\times\vec{b})-3\vec{b}$，则 $|\vec{c}|=$ $8\sqrt{3}$ 。

3、设直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{5}$ 在平面 $x+2y-z+k=0$ 上，则 $k=$ 1 。

4、过点(1，1，1)且平行于直线 $\begin{cases}3x+y-z=2\\2x-z-2=0\end{cases}$ 与 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{1}$ 的平面方程是

$x+3y+z-5=0$ 。

5、设 $x^2+y^2+z^2-4z=0$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$ $\dfrac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}$ 。

6、设 $z=f(xy,x^2+y^2)$，$y=\varphi(x)$，f,φ 可微，则 $\dfrac{dz}{dx}=$ $f_1'\cdot(\varphi(x)+x\varphi'(x))+f_2'\cdot(2x+2\varphi(x)\cdot\varphi'(x))$

7、设 $f(x,y)$ 在点（0，0）的邻域内有定义，$f_x(0,0)=3$，$f_y(0,0)=-1$，则下列结论中正确的是 D 。

（A）$dz\big|_{(0,0)}=3dx-dy$；

（B）曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的一个法向量为 $(3,-1,1)$；

（C）曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\y=0\end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的一个切向量为 $(3,0,1)$；

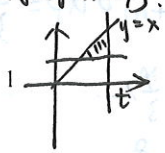
（D）曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\y=0\end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的一个切向量为 $(1,0,3)$ $\begin{cases}x=x\\y=0\\z=f(x,0)\end{cases}$ $(1,0,f_x(0,0))$ $=(1,0,3)$

8、交换二次积分的次序 $\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy+\int_1^4 dx\int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy=$ $\int_{-1}^{2}dy\int_{y^2}^{y+2}f(x,y)dx$

9、设 $f(x)$ 连续，$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$，则 $F'(2)=$ $f(2)$ 。

二、试解下例各题（每小题8分）：

交换积分次序.



$\int_1^t dx\int_1^x f(x)dy$

$=\int_1^t f(x)(x-1)dx$

$\therefore F'(t)=f(t)(t-1)$

1. 设切点为(x_0,y_0,z_0)

切平面为：$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-(z-z_0)=0$

又切平面过直线

$$\therefore \begin{cases} 2x_0\cdot(0-x_0)+2y_0(0-y_0)-(-2-z_0)=0 \\ z_0=x_0^2+y_0^2 \\ (2x_0,2y_0,-1)\cdot(1,1,4)=0 \end{cases}$$

解得 $x_0=1,\ y_0=1\ z_0=2$

$\therefore$ 平面方程为 $2(x-1)+2(y-1)-(z-2)=0$

即 $2x+2y-z-2=0$

1、求过直线$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{4}$，且与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切的平面方程。

2. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x$ $\dfrac{\partial u}{\partial y}=2y$ $\dfrac{\partial u}{\partial z}=2z$. 曲面上外法线 $\vec{n}=\left(\dfrac{2x_0}{a^2},\dfrac{2y_0}{b^2},\dfrac{2z_0}{c^2}\right)$ $\therefore \dfrac{\partial u}{\partial l}=2x_0\cdot\dfrac{\frac{2x_0}{a^2}+2y_0\cdot\frac{2y_0}{b^2}+2z_0\cdot\frac{2z_0}{c^2}}{\sqrt{\frac{4x_0^2}{a^4}+\frac{4y_0^2}{b^4}+\frac{4z_0^2}{c^4}}}=\dfrac{2}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}}$

2、求函数$u=x^2+y^2+z^2$在曲面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$上点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处沿外法线方向的方向导数。

3. 设曲面上点为(x,y,z). 则 $d=\dfrac{2x-y+2z-4}{3}$ 设 $L(x,y,z,\lambda)=2x-y+2z+\lambda(10-x^2-y^2-z)$

上部

3、平面$2x-y+2z-4=0$截曲面$z=10-x^2-y^2$成上、下两部分曲面，求上部分曲面上的点到这个平面的最大距离。

$$\begin{cases} L_x=2-2\lambda x=0 \\ L_y=-1-2\lambda y=0 \\ L_z=2-\lambda=0 \\ L_\lambda=10-x^2-y^2-z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{4} \\ z=\frac{155}{16} \end{cases} \quad d=\frac{1+\frac{1}{4}+\frac{155}{8}-4}{3}=\frac{133}{24}$$

三、试解下例各题（每小题7分）：

1、求$I=\iint\limits_D \dfrac{\sin y}{y}dxdy$，其中D为曲线 $y=\sqrt{x}$ 及直线$y=x$ 所围成。

1.

$$I=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{y}\frac{\sin y}{y}dx=\int_0^1 \sin y(1-y)dy=1-\sin 1$$

2、求积分$I=\int_0^2 dy\int_{\frac{y}{\sqrt{3}}}^{y} y\sqrt{x^2+y^2}dx+\int_2^{2\sqrt{3}}dy\int_{\frac{y}{\sqrt{3}}}^{2} y\sqrt{x^2+y^2}dx$。

$$I=\int_0^2 dx\int_x^{\sqrt{3}x} y\sqrt{x^2+y^2}\,dy=\frac{32-8\sqrt{2}}{3}$$

3、求由曲面$z=x^2+2y^2$及$z=6-2x^2-y^2$所围成的立体的体积。

$$V=\iint\limits_{D_{xy}}(6-2x^2-y^2-x^2-2y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}(6-3\rho^2)\rho\,d\rho=6\pi$$

$D_{xy}: x^2+y^2\le 2$

四、（7分）设有一半径为1（单位），高为2（单位）的圆柱形容器，盛有$\dfrac{4}{3}$（单位）高的水，放在离心机上高速旋转，因受离心力的作用，水面呈抛物面形，问当水刚要溢出容器时，液面的最低点在何处？（提示：此时容器中水的量没有改变）

五、（12分）设$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$，讨论函数在（0，0）

见12-13下期中试卷第六大题.

（1）是否连续；（2）偏导数是否存在；（3）偏导数是否连续；（4）是否可微分。

四.

如图建立坐标系，设最低点为$(0,0,h)$

抛物面为 $z=c(x^2+y^2)+h$.

则液体体积为 $V=\iint\limits_D[c(x^2+y^2)+h]dxdy$，其中 $D: x^2+y^2\le 1$.

而因为容量不变，所以 $V=\pi\cdot\frac{4}{3}=\frac{4}{3}\pi$.

$\therefore \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(c\rho^2+h)\rho\,d\rho=\frac{4}{3}\pi$.

即 $\frac{\pi}{2}c+\pi h=\frac{4}{3}\pi$.

$\therefore c+2h=\frac{8}{3}$

又. $2=c+h$.（因为$(0,1,2)$在抛物面上）

$\therefore h=\frac{2}{3}$ $c=\frac{4}{3}$ $\therefore$ 液面最低点在离容器底高为$\frac{2}{3}$处

即$(0,0,\frac{2}{3})$处