

2012/13(二)浙江工业大学高等数学期中考试试卷 A

学院：_____ 班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____

任课老师：_____ 得分：_____

一、填空题 (每小题 4 分) :

1、 $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$, $\vec{a} \times \vec{b} = (15, 1, 7)$ 。

2、向量 $\vec{a} = (4, -3, 4)$ 在向量 $\vec{b} = (2, 2, 1)$ 上的投影是 2 。

3、将 xOz 坐标面上的抛物线 $z^2 = 5x$ 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程是

$$y^2 + z^2 = 5x$$

4、曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 与 $x + z = 1$ 的交线在 xOy 面上的投影方程是 $\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 = 8 \\ z = 0 \end{cases}$ 。

5、已知 $z = xy + \frac{x}{y}$, 则 $dz = (y + \frac{1}{y})dx + (x - \frac{x}{y^2})dy$ 。

6、曲线 $\begin{cases} z = \frac{x^2 + y^2}{4} \\ y = 4 \end{cases}$ 在点 $(2, 4, 5)$ 的切线与正向 x 轴所成的倾角是 $\frac{\pi}{4}$ 。

7、隐函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $xyz = e^z$ 确定, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2y^2 z e^z - y^2 z^2 e^z - 2y^2 z^2}{(e^z - yz)^3}$ 。

8、函数 $f(x, y) = 4(x - y) - x^2 - y^2$ 的极大值点是 $(2, -2)$ 。

9、积分 $\int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy$ 在极坐标下的二次积分是 $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{2}{\cos \theta}} f(r) r dr$ 。

10、交换积分次序 $\int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx = \int_0^4 dx \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy$ 。

11、设 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$, 则三重积分在球面或柱面坐标系下的三次积

分 $\iiint_{\Omega} f(x^2 + y^2) dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 f(r^2 \sin^2 \varphi) r^2 \sin \varphi dr$ 。

二、试解下列各题 (每小题 6 分) :

1、设 $f(u, v)$ 具有连续的一阶偏导数, 且 $w = f(x^2 - y^2, e^{xy})$, 求: $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2xf'_1 + ye^{xy}f'_2$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -2yf'_1 + xe^{xy}f'_2$$

法: $\vec{n}_1 = (2x, 2y, 2z)|_{(1,1,1)} = (-1, 2, 2)$ $\vec{T} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (16, 9, -1)$
 $\vec{n}_2 = (2, -3, 5)$

2、求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 3x = 0 \\ 2x - 3y + 5z - 4 = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切线方程与法平面方程。

法: $\begin{cases} 2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} + 2z \cdot \frac{dz}{dx} - 3 = 0 \\ 2 - 3 \frac{dy}{dx} + 5 \frac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$ 解得 $\frac{dy}{dx}|_{(1,1,1)} = \frac{9}{16}$ $\frac{dz}{dx}|_{(1,1,1)} = -\frac{1}{16}$ $\vec{T} = (1, \frac{9}{16}, -\frac{1}{16})$

把 $(1, 1, 1)$ 代入 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2} \\ 3 \frac{dy}{dx} - 5 \frac{dz}{dx} = 2 \end{cases}$

\therefore 切线方程: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{\frac{9}{16}} = \frac{z-1}{-\frac{1}{16}}$

法平面 $16(x-1) + 9(y-1) - (z-1) = 0$

3、设曲面方程 $F(z-ax, z-ay) = 0$, 其中 $F(u, v)$ 偏导数连续, 且 $F_u + F_v \neq 0$,

证明, 曲面上任一点处的法线恒与一常向量垂直。

证: $\vec{n} = (F_x, F_y, F_z)$

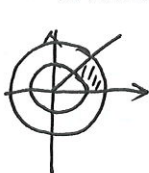
$F_x = -aF'_1$ $F_y = -aF'_2$ $F_z = F'_1 + F'_2$

取 $\vec{m} = (1, 1, a)$, 则 $\vec{n} \cdot \vec{m} = 0$. 即 $\vec{n} \perp \vec{m}$

三、试解下列各题 (每小题 6 分):

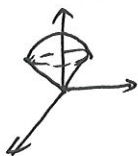
1、求 $\iint_D \arctan \frac{y}{x} d\sigma$, 其中 D 是由直线 $y=x$, $y=0$ 及曲线 $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 1$

所围在第一象限内的闭区域。



$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_1^2 \theta \cdot p dp$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta d\theta \cdot \int_1^2 p dp = \frac{1}{2} \theta^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{2} p^2 \Big|_1^2 = \frac{3}{64} \pi$

2、求曲面 $z = 6 - x^2 - y^2$ 与 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围成的立体的体积。



$D_{xy}: \begin{cases} 6 - x^2 - y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$

$V = \iiint_{\Omega} 1 dv \stackrel{\text{法}}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 p dp \int_p^{6-p^2} dz$
 $= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (6p - p^3 - p^2) dp = \frac{32}{3} \pi$

法: $\int_0^2 dz \iint_{D_z} dx dy + \int_2^6 dz \iint_{D_z} dx dy$
 $= \int_0^2 \pi z^2 dz + \int_2^6 \pi (6-z) dz = \frac{32}{3} \pi$

四、(8分) 求垂直于 xOy 面, 并通过从点 $(1, -1, 1)$ 到直线 $\begin{cases} y-z+1=0 \\ x=0 \end{cases}$ 的垂线的平面方程。

解: 设垂足为 $(0, t, t+1)$ 。

而直线 $\begin{cases} x=0 \\ y=y \\ z=y+1 \end{cases}$ 方向向量取 $(0, 1, 1)$



思路: 先求垂足 A.
利用 $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{s} = 0$
再用 $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \vec{s}$

$$\text{则 } (-1, t+1, t) \cdot (0, 1, 1) = 0$$

$$\therefore -1 + t + 1 = 0 \quad t = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{垂足为 } (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$\therefore \vec{n} = (-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \times (0, 1, 1) = (\frac{1}{2}, 1, 0)$$

\therefore 平面方程为

$$\frac{1}{2}(x-1) + y + 1 = 0$$

$$\text{即 } x + 2y + 1 = 0$$

五、(8分) 用条件极值的方法证明空间点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$

的距离公式

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

证: 即求 P_0 到平面上任一点的距离的最小值。

设平面上点 (x, y, z) 。则

$$L = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 + \lambda (Ax + By + Cz - D)$$

$$\begin{cases} L_x = 2(x-x_0) + A\lambda = 0 \\ L_y = 2(y-y_0) + B\lambda = 0 \\ L_z = 2(z-z_0) + C\lambda = 0 \\ L_\lambda = Ax + By + Cz - D = 0 \end{cases}$$

$$\therefore A \cdot \left(\frac{-A\lambda + 2x_0}{2} \right) + B \cdot \left(\frac{-B\lambda + 2y_0}{2} \right) + C \cdot \left(\frac{-C\lambda + 2z_0}{2} \right) - D = 0$$

$$\therefore \lambda = \frac{2(Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D)}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$\begin{aligned} \therefore d &= \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = \sqrt{\frac{A^2\lambda^2}{4} + \frac{B^2\lambda^2}{4} + \frac{C^2\lambda^2}{4}} \\ &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned}$$

六、(10分) 设 $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$, 问函数在点(0,0)处

(1) 是否连续; (2) 偏导数是否存在; (3) 偏导数是否连续; (4) 是否可微。

$$\textcircled{1} \because 0 \leq |(x^2+y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2}| \leq (x^2+y^2) \rightarrow 0$$

$$\therefore \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

\therefore 在(0,0)连续

$$\textcircled{2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin \frac{1}{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = 0$$

$$\therefore f_x(0,0) = 0$$

同理 $f_y(0,0) = 0$ \therefore 在(0,0)偏导数存在。

$$\textcircled{3} f_x(x,y) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

而 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x,y)$ 不存在, 因为 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=0}} f_x(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2})$ 不存在。

\therefore 偏导数在(0,0)不连续

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)\Delta x - f_y(0,0)\Delta y}{\rho} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2) \sin \frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \sin \frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \sin \frac{1}{\rho^2} = 0 \end{aligned}$$

\therefore 在(0,0)可微