

2014/2015(二)浙江工业大学高等数学(下)
期中考试试卷 A

学院: _____ 班级: _____ 学号: _____ 姓名: _____

任课教师: _____ 得分: _____

一、填空选择题 (每小题 4 分):

1. 设向量 $\vec{a} = (4, 3, -5)$, $\vec{b} = (k, 0, 4)$, 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $k = \underline{5}$.

2. 直线 $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{2}$ 与 z 轴夹角的余弦是 $\underline{\frac{2}{3}}$.

3. 设 $z = (xy)^x$ 则 $dz = \underline{(xy)^x [\ln(xy) + 1] dx + x^2 (xy)^{x-1} dy}$

4. 设 $\sin(x+2y-3z) - (x+2y-3z) = 0$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \underline{\frac{1}{3}}$.

5. 设 $z = f(xy, x^2 + y^2)$, $y = \varphi(x)$, f, φ 可微, 则 $\frac{dz}{dx} = \underline{f'_1 \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)) + f'_2 \cdot (2x + 2\varphi(x)\varphi'(x))}$

6. 点 $\underline{(1, -1)}$ 是函数 $f(x, y) = 2(x-y) - x^2 - y^2$ 的极 大 值点.

7. 改变积分次序 $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy = \underline{\int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx}$

8. 已知 Ω : 由 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 所围成, 则 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz = \underline{\frac{1}{24}}$.

9. 曲线 $\begin{cases} x = y^2 \\ z = x^2 \end{cases}$ 上点 $(1, 1, 1)$ 处的法平面方程为 (C)

(A) $2x - y - 4z + 3 = 0$;

(B) $2x - y + 4z - 5 = 0$;

(C) $2x + y + 4z - 7 = 0$;

(D) $2x + y - 4z + 1 = 0$.

10. $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的领域内有定义, 且 $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ 则 (C)

(A) $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续;

(B) $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的全微分 $dz = 0$;

(C) 曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = y_0 \end{cases}$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处有切线, 且切线平行 x 轴, 其中 $z_0 = f(x_0, y_0)$;

(D) $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 有极值;

二、试解下列各题（每小题 8 分）：

1. 求过点 $(1,1,1)$ 且平行于直线 $\begin{cases} 3x+y-z=2 \\ 2x-z-2=0 \end{cases}$ 与 $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$ 的平面方程。

$$\vec{l}_1 = (3, 1, -1) \times (2, 0, -1) = (-1, 1, -2)$$

$$\vec{l}_2 = (-1, 1, -2) \times (2, -1, 1) = (-1, -3, -1)$$

$$\text{平面: } x-1+3(y-1)+z-1=0$$

$$\text{即 } x+3y+z-5=0$$

2. 求过直线 $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{4}$ ，且与 $z = x^2 + y^2$ 相切的平面方程。

设平面与 $z = x^2 + y^2$ 相切点为 (x_0, y_0, z_0) ，则

$$\text{切平面为 } 2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

$$\text{又过直线 } \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{4}, \text{ 则有 } \begin{cases} z_0 = x_0^2 + y_0^2 \\ 2x_0 + 2y_0 - 4 = 0 \\ z - z_0 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{解得切点为 } (1, 1, 2) \\ \text{切平面方程为} \\ 2x + 2y - z - 2 = 0 \end{array}$$

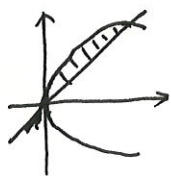
3. 求曲面 $z = 25(x^2 + y^2)$ 及平面 $z = 5$ 所围成的空间体的体积。



$$\text{法一: } V = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{25(x^2+y^2)}^5 dz = \int_0^{\sqrt{5}} d\rho \int_0^{\frac{\sqrt{5}}{\rho}} \rho d\rho \int_{\rho^2}^5 dz = \frac{\pi}{2}$$

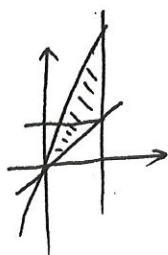
$$\text{法二: } V = \int_0^5 dz \iint_{D_z} 1 dx dy = \int_0^5 S(D_z) dz = \int_0^5 \pi \cdot \frac{z}{25} dz = \frac{\pi}{2}$$

4. 计算 $I = \iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy$ ，其中 D 为曲线 $y = \sqrt{x}$ 及直线 $y = x$ 所围成。



$$\begin{aligned} \int_0^1 dy \int_{y^2}^y \frac{\sin y}{y} dx &= \int_0^1 \frac{\sin y}{y} (y - y^2) dy \\ &= \int_0^1 (\sin y - y \sin y) dy \\ &= -\cos y \Big|_0^1 + y \cos y \Big|_0^1 - \sin y \Big|_0^1 \\ &= 1 - \sin 1 \end{aligned}$$

5. 求积分 $I = \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{\sqrt{3}}}^y y \sqrt{x^2 + y^2} dx + \int_2^{2\sqrt{3}} dy \int_{\frac{y}{\sqrt{3}}}^2 y \sqrt{x^2 + y^2} dx$.



$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 2, \frac{y}{\sqrt{3}} \leq x \leq y\} \cup \{(x, y) \mid 2 \leq y \leq 2\sqrt{3}, \frac{y}{\sqrt{3}} \leq x \leq 2\}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} y \sqrt{x^2 + y^2} dy \\ &= \int_0^2 \frac{1}{3} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_x^{\sqrt{3}x} dx \\ &= \int_0^2 \frac{1}{3} (-2\sqrt{3}x^3 + 8x^3) dx = \frac{32 - 8\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

三、(10分) 设 $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$, 讨论函数在 $(0, 0)$

处 (1) 是否连续; (2) 偏导数是否存在; (3) 偏导数是否连续; (4) 是否可微分。

$$(1) \quad \left| (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \right| \leq x^2 + y^2$$

$$\therefore \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = 0$$

$$\left(\text{或 } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = \lim_{t \rightarrow 0} t \sin \frac{1}{t} = 0 \right)$$

$\therefore f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 连续

$$(2) \quad \because \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin \frac{1}{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = 0$$

$\therefore f_x(0, 0) = 0$ 同理 $f_y(0, 0) = 0$ $\therefore f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 偏导数存在

$$(3) \quad f_x(x, y) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

又 $\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0}} f_x(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \sin \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{2x^2} \right)$ 不存在 \therefore 在 $(0, 0)$ 偏导数不连续

四、(10分) (1) 求函数 $z = x^2 + y^2$ 在椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 上点 $P(x_0, y_0)$ 处沿外法线方向的方向导数。(2) 在该椭圆上哪一点处此方向导数最大? 并求最大值。

(1) 外法线方向为 $(2x_0, \frac{y_0}{2})$, 单位化为 $(\frac{4x_0}{\sqrt{16x_0^2 + y_0^2}}, \frac{y_0}{\sqrt{16x_0^2 + y_0^2}})$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial z}{\partial \nu} \Big|_{(x_0, y_0)} = \frac{8x_0^2 + 2y_0^2}{\sqrt{16x_0^2 + y_0^2}} = \frac{4}{\sqrt{4x_0^2 + \frac{y_0^2}{4}}}$$

(2) 设 $L(x, y, \lambda) = 4x^2 + \frac{y^2}{4} + \lambda(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1)$

$$\begin{cases} L_x = 8x + 2\lambda x = 0 \\ L_y = \frac{y}{2} + \frac{\lambda}{2}y = 0 \\ L_\lambda = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 2 \end{cases}$$

\therefore 在 $(0, \pm 2)$ 上最大, 最大值为 4.

$$\begin{aligned} & \because \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\rho} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{((x)^2 + (y)^2) \cdot \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}}{\rho} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \cdot \frac{1}{\rho^2} = 0 \\ & \therefore \text{在 } (0, 0) \text{ 可微分} \end{aligned}$$