

16/17(二)浙江工业大学高等数学A期中考试试卷

学院: _____ 班级: _____ 姓名: _____ 学号: _____

任课教师: _____

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 总分 |
|----|---|---|---|---|---|----|
| 得分 | | | | | | |

一、填空题 (每小题4分):

1、设向量 $\vec{a} = (4, 3, -5)$, $\vec{b} = (k, 0, 4)$, 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $k = \underline{5}$ 。

2、已知向量 \vec{a} 与 \vec{b} 不平行, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 4$, $\vec{c} = 2(\vec{a} \times \vec{b}) - 3\vec{b}$, 则 $|\vec{c}| = \underline{2\sqrt{5}}$ 。

3、通过两曲面 $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1 \\ x^2 = y^2 + z^2 \end{cases}$ 的交线, 且母线平行于 z 轴的柱面方程为 $\underline{4x^2 - y^2 = 1}$ 。

4、直线 $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{2}$ 与 z 轴夹角的余弦是 $\underline{\frac{2}{3}}$ 。

5、函数 $f(x, y) = 2(x-y) - x^2 - y^2$ 的极值点为 $\underline{(1, -1)}$ 。

6、设 $z = f(xy, e^{xy})$, $f(u, v)$ 具有连续的一阶偏导数, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \underline{y f_1' + y e^{xy} f_2'}$ 。

7、交换积分次序 $\int_0^2 dy \int_{-y}^y f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_{-y}^y f(x, y) dx = \underline{\int_0^1 dx \int_x^{1-x} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy}$ 。

8、设 $I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV$, 其中 Ω 由 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 所围成区域, $f(x, y, z)$ 为连续函数, 写出它在直角坐标系下的三次积分 $\underline{\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) dz}$ 。

9、设 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处沿某方向 \vec{l} 的方向导数存在, 则 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处 (D)

(A) 偏导数存在 (B) 可微 (C) 连续 (D) A、B、C 都不确定。

10、 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的领域内有定义, 且 $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ 则 (D)

(A) $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续; (B) $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 有极值;

(C) $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的全微分 $dz = 0$;

(D) 曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = y_0 \end{cases}$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处有切线, 且切线平行 x 轴, 其中 $z_0 = f(x_0, y_0)$ 。

二、试解下列各题 (每小题 6 分) :

1、求过点(1, 1, 1)且平行于直线 $\begin{cases} 3x+y-z=2 \\ 2x-z-2=0 \end{cases}$ 与 $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$ 的平面方程。

解: $\vec{r}_1 = (3, 1, -1) \times (2, 0, -1) = (-1, 1, -2)$ — 2分
 $\vec{r}_2 = (2, -1, 1)$
 $\vec{n} = (-1, 1, -2) \times (2, -1, 1) = (1, -3, 1)$ — 3分

平面方程 $x-1+3(y-1)+3-5=0$ — 1分

2、求过直线 $\frac{x}{y} = \frac{y}{z+2} = \frac{1}{4}$, 且与 $z = x^2 + y^2$ 相切的平面方程。

解: 设切点为 (x_0, y_0, z_0)
 过点 $\frac{x}{y} = \frac{y}{z+2} = \frac{1}{4}$
 $\begin{cases} z_0 = x_0^2 + y_0^2 \\ 2x_0(1-x_0) + 2y_0(y_0-1) - (1-z_0) = 0 - 2\lambda \\ x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = 2 \end{cases}$ — 2分

又过点 $\frac{x}{y} = \frac{y}{z+2} = \frac{1}{4}$
 $\begin{cases} z_0 = x_0^2 + y_0^2 \\ 2x_0(1-x_0) + 2y_0(y_0-1) - (1-z_0) = 0 - 2\lambda \\ x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = 2 \end{cases}$ — 2分

3、求直线 $\begin{cases} 2x-4y+z=0 \\ 3x-y-2z=9 \end{cases}$ 在平面 $4x-y+z=1$ 上的投影直线方程。

解: 设平面 $2x-4y+z = \lambda(3x-y-2z-9) = 0$ — 3分

$\vec{n} = (2+\lambda, -4-\lambda, 1-2\lambda)$
 $\vec{n} \cdot (4, -1, 1) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{13}{11}$ — 2分
 投影直线 $\begin{cases} 17x+31y-37z-11=0 \\ 4x-y+3=0 \end{cases}$ — 1分

4、设 $z = y^x \ln(xy)$, 求: $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

解: $\frac{\partial z}{\partial x} = y^x \ln y + y^x \cdot \frac{1}{x} = y^x \ln y + \frac{1}{x} y^x$ — 3分
 $\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot y^{x-1} \ln(xy) + y^x \cdot \frac{1}{y} = x y^{x-1} \ln(xy) + y^{x-1}$ — 3分

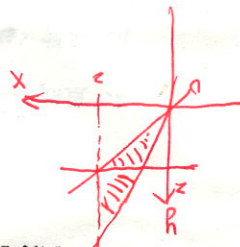
三、试解下列各题 (每小题 7 分) :

1、计算 $I = \iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy$, 其中 D 为曲线 $y = \sqrt{x}$ 及直线 $y = x$ 所围成。

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 dy \int_y^y \frac{\sin y}{y} dx = \int_0^1 \frac{\sin y}{y} (y - y^2) dy \\
 &= \int_0^1 (\sin y - y \sin y) dy \\
 &= (-\cos y) \Big|_0^1 + \int_0^1 y d(\cos y) \\
 &= (-\cos 1) + 1 - \int_0^1 \cos y dy \\
 &= -\cos 1 + 1 - \sin y \Big|_0^1 \\
 &= 1 - \sin 1
 \end{aligned}$$



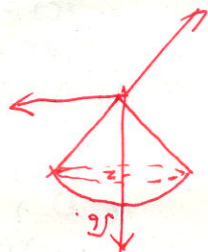
$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x y \sqrt{x^2 + y^2} dy \\
 &= \int_0^1 \left[\frac{1}{3} (x^2 + y^2)^{3/2} \right]_{x^2}^x dx \\
 &= \int_0^1 (8x^3 - 2\sqrt{x}) dx \\
 &= \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{8 \cdot 2\sqrt{x}}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{32} \\
 &= \frac{3}{32}
 \end{aligned}$$

3、计算曲面 $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围成的空间体的体积。

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_D (6 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy \\
 &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{6-y^2}} (6 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy \\
 &= \int_0^2 \left[6x - \frac{x^2}{2} - y^2 x - \frac{2}{3} (x^2 + y^2)^{3/2} \right]_0^{\sqrt{6-y^2}} dy \\
 &= \int_0^2 \left(6\sqrt{6-y^2} - \frac{1}{2} (6-y^2)^{3/2} - y^2 \sqrt{6-y^2} - \frac{4}{3} (6-y^2)^{3/2} \right) dy \\
 &= \int_0^2 \left(6\sqrt{6-y^2} - \frac{5}{2} (6-y^2)^{3/2} \right) dy \\
 &= \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$



四、(9分) 已知曲线 $x = 2cht$, $y = 2sh t$, $z = 2t$ 上点 P 的切线平行于平面 $y - z = 2$, 求: 点 P 到此平面的距离。(双曲函数 $sh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, $ch t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$)

解:
$$\begin{cases} x = e^t + e^{-t} \\ y = e^t - e^{-t} \\ z = 2t \end{cases}$$

 切向量 $\vec{T} = (e^t - e^{-t}, e^t + e^{-t}, 2)$
 切线方程 $\frac{x - e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}} = \frac{y - e^t + e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \frac{z - 2t}{2}$

切线平行于平面 $y - z = 2$
 $\vec{T} \cdot (0, 1, -1) = 0$
 $(e^t - e^{-t}) - (e^t + e^{-t}) = 0$
 $-2e^{-t} = 0$
 $t = 0$
 $P(2, 0, 0)$
 $d = \frac{|0 - 0 - 2|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2}$

五、(6分) 设函数 $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

讨论函数在点 $(0, 0)$ 处 (1) 是否连续、(2) 偏导数是否存在、(3) 是否可微。

(1) $\because \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{x^2+y^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \cdot t = 0$

$\therefore f(0,0)$ 连续

(2) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 \cdot \frac{1}{(\Delta x)^2} - 0}{\Delta x} = 0$

$\therefore f_x(0,0) = 0$ 偏导数存在

(3) $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \sin \frac{1}{\rho^2}}{\rho} = 0$

$\therefore f(0,0)$ 可微