

2017/18 浙江工业大学高等数学(下)期中考试试卷 A

学院: _____ 班级: _____ 姓名: _____ 学号: _____

任课老师: _____

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

一、填空选择题 (每小题 4 分):

1. 设某二阶线性常系数非齐次微分方程有三个特解: $y=1, y=x, y=x^2$, 则该微分方程的通解为 $y=C_1(x-1)+C_2(x^2-1)+1$ 。

2. 向量 $\vec{a}=(4,-3,4)$ 在向量 $\vec{b}=(2,2,1)$ 上的投影是 2。

3. 设 $\vec{a}=(2,1,2)$, $\vec{b}=(4,-1,10)$, $\vec{c}=\vec{b}-\lambda\vec{a}$, 且 $\vec{a}\perp\vec{c}$, 则 $\lambda=\underline{3}$ 。

4. 设 $f(x,y)=x+(y-1)\arctan(xy)$, 则 $f_x(1,1)=\underline{1}$ 。

5. 设 $z=2^{x+y^2}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y}=\underline{2y\cdot 2^{x+y^2}\cdot \ln 2}$ 。

6. 曲线 $2x=y^2, z=x^2$ 在某一点处的切向量与三个坐标轴正向的夹角相等, 则该点坐标是 $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4})$ 。

7. 函数 $u=3x^2y^2-2y+4x+6z$ 在原点沿 $\vec{OA}=(1,1,1)$ 方向的方向导数是 $\frac{8}{3}\sqrt{3}$ 。

8. 设 $D: |x|\leq 1, 0\leq y\leq 1$. 则 $\iint_D (x^3+1)e^y dx dy = \underline{2(e-1)}$ 。

9. 设 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的邻域内有定义, $f_x(0,0)=3, f_y(0,0)=-1$, 则下列结论中正确的是 (D)。

(A) $dz|_{(0,0)}=3dx-dy$;

(B) 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的一个法向量为 $(3,-1,1)$;

(C) 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的一个切向量为 $(3,0,1)$;

(D) 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的一个切向量为 $(1,0,3)$ 。

10. 具有特解 $y_1=e^{-x}, y_2=2xe^{-x}, y_3=3e^x$ 的三阶常系数齐次线性微分方程是 (B)

(A) $y'''-y''-y'+y=0$;

(B) $y''' + y'' - y' - y = 0$;

(C) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$;

(D) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$;

二、试解下列各题（每小题 7 分）：

1. 求微分方程 $x^2 dy + 2(y - 2x)dx = 0$ 的通解

法一: $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 4$ $y = C \frac{1}{x^2}$ $\text{法二: } \text{令 } u = \frac{y}{x}$
 先求 $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 0$ 的通解 $\text{令 } y = C(x) \frac{1}{x^2}$
 $C'(x) \cdot \frac{1}{x^2} = 4$
 $C'(x) = 4x^2$
 $C(x) = \frac{4}{3}x^3$ $y = \frac{4}{3}x + \frac{C}{x^2}$
 $\ln|y| = 2\ln|x| + C_1$ $y = \frac{4}{3}x + \frac{C}{x^2}$
 $3yx^2 - 4x^3 = C$

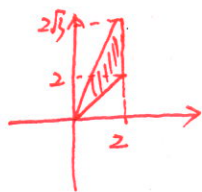
2. 求微分方程 $y'' - 2y' = 0$, 满足条件 $x=0$ 时 $y=0, y'=-1$ 的特解。

令 $y' = p$ $p = -\frac{1}{2x+C_1}$ $C_1 = 1, C_2 = 0$
 $p' - 2p^2 = 0$ $y' = -\frac{1}{2x+C_1}$ \therefore 特解
 $\frac{dp}{p^2} = 2dx$ $y = -\frac{1}{2}\ln|2x+C_1| + C_2$ $y = -\frac{1}{2}\ln|2x+1|$
 $-\frac{1}{p} = 2x+C_1$ $x=0, y=0$ 代入
 $y' = -1$

3. 设 $z = f(\frac{x}{y}, xy)$, 其中 $f(x, y)$ 二阶偏导数连续, 求: $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}f'_1 + yf'_2$
 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{y^2}f'_1 + \frac{1}{y}(-\frac{x}{y^2}f''_{11} + x f''_{12}) + f'_2 + y \cdot (-\frac{x}{y^2}f''_{21} + x f''_{22})$
 $= -\frac{1}{y^2}f'_1 + f'_2 - \frac{x}{y^3}f''_{11} + xy f''_{22}$

4. 求积分 $I = \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{\sqrt{3}}}^y y \sqrt{x^2 + y^2} dx + \int_2^{2\sqrt{3}} dy \int_{\frac{y}{\sqrt{3}}}^2 y \sqrt{x^2 + y^2} dx$.



$I = \int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} y \sqrt{x^2 + y^2} dy$
 $= \int_0^2 \frac{1}{3}(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_x^{\sqrt{3}x} dx$
 $= \int_0^2 \frac{1}{3}(8x^3 - 2\sqrt{2}x^3) dx$
 $= \frac{32 - 8\sqrt{2}}{3}$

法二: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{2}{\cos\theta}} \rho \sin\theta \cdot \rho d\rho$
 $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 \rho \sin\theta \cdot \rho d\rho$

三、试解下列各题（每小题 8 分）：

1. 求垂直于平面 $z=0$ 并通过点 $(1, -1, 1)$ 到直线 $\begin{cases} y-z+1=0 \\ x=0 \end{cases}$ 的垂线的平面方程。

法一：设直线上垂足为 $(0, t, t+1)$

$$\text{则 } (-1, t+1, t) \cdot (0, 1, 1) = 0$$

$$\therefore 2t+1=0 \quad t=-\frac{1}{2}$$

$$\text{垂足 } (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$\vec{n} = (-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \times (0, 0, 1)$$

$$= (\frac{1}{2}, 1, 0)$$

$$\text{平面方程: } \frac{1}{2}(x-1) + y + 1 = 0$$

$$\text{即 } x + 2y + 1 = 0$$

法二：求垂平面 $y+1+z-1=0$

$$\begin{cases} x=0 \\ y-z+1=0 \\ y+z=0 \end{cases} \text{ 解 } (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$\vec{n} = (\frac{1}{2}, 1, 0)$$

$$\text{平面: } x + 2y + 1 = 0$$

2. 求过直线 $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{4}$ ，且与曲面 $z = x^2 + y^2$ 相切的平面方程。

设切点为 (x_0, y_0, z_0)

$$\vec{n} = (2x_0, 2y_0, -1)$$

$$\text{切平面 } 2x_0(x-x_0) + 2y_0(y-y_0) - (z-z_0) = 0$$

$$\begin{cases} 2x_0(0-x_0) + 2y_0(0-y_0) - (-2-z_0) = 0 \\ (2x_0, 2y_0, -1) \cdot (1, 1, 4) = 0 \\ z_0 = x_0^2 + y_0^2 \end{cases}$$

$$\text{解得 } x_0=1, y_0=1, z_0=2$$

$$\text{平面方程为 } 2(x-1) + 2(y-1) - (z-2) = 0$$

$$2x + 2y - z - 2 = 0$$

四、(8分) 求平面 $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ 和曲面 $x^2 + y^2 = 1$ 交线上与 xOy 平面距离最大的点和距离为 0 的点。

解: 距离为 0, 即 $z=0$

$$\begin{cases} x + \frac{y}{2} = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

点为 $(1, 0, 0)$

$(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 0)$

距离最大之点:

$$L(x, y, \lambda) = z^2 + \lambda(x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} - 1) + u(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\begin{cases} L_x = \lambda + 2ux = 0 \\ L_y = \frac{\lambda}{2} + 2uy = 0 \\ L_z = 2z + \frac{\lambda}{3} = 0 \\ L_\lambda = x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} - 1 = 0 \\ L_u = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

解得点 $(\frac{2}{5}\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 3 - \frac{3}{2}\sqrt{5})$

$(-\frac{2}{5}\sqrt{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}, 3 + \frac{3}{2}\sqrt{5})$

\therefore 距离最大之点为 $(-\frac{2}{5}\sqrt{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}, 3 + \frac{3}{2}\sqrt{5})$

五、(8分) 设 $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$, 讨论函数在点 $(0, 0)$ 处

(1) 是否连续; (2) 偏导数是否存在; (3) 偏导数是否连续; (4) 是否可微。

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot \sin \frac{1}{t} = 0$$

\therefore 在 $(0, 0)$ 连续。

$$(2) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin \frac{1}{(\Delta x)^2} - 0}{\Delta x} = 0$$

$$f_x(0, 0) = 0 \quad f_y(0, 0) = 0$$

$$(3) f_x(x, y) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0}} f_x(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}) \text{ 不存在}$$

\therefore 偏导数在 $(0, 0)$ 不连续

$$(4) \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) - f_x(0,0)\Delta x - f_y(0,0)\Delta y}{\rho}$$

$$= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \sin \frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\rho}$$

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \cdot \sin \frac{1}{\rho^2}$$

$$= 0$$

\therefore 在 $(0, 0)$ 可微。